Thème n°3 : tremplin binomial

Introduction

Voici quelques objectifs de ce thème :

- rencontrer quelques exemples de dénombrement
- se familiariser avec les coefficients binomiaux
- acquérir certaines techniques de calcul relatives aux sommes binomiales.

Dans le texte, si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle «factorielle n» noté $n!$, le nombre $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ avec la convention $0! = 1$.

Par exemple, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 4 \times 3!$.

Si un ensemble E possède un nombre fini d'éléments, on appellera cardinal de E, ce nombre d'éléments noté $\operatorname{Card} E$. Par exemple, $\operatorname{Card}\{4, 7, 9\} = 3$.

I Un peu de dénombrement

1 Un exemple introductif : nombre de tiercés possibles

Considérons une course hippique avec 14 chevaux au départ. Trouver le tiercé gagnant consiste à trouver dans l'ordre le podium, c'est-à-dire les trois premiers chevaux.

1. Combien y-a-t-il de tiercés possibles ?

2. Combien y-a-t-il de tiercés possibles dans le **désordre** ?

2 Dénombrement de listes (ordonnées), notion de p-liste

Si E est un ensemble, une p-liste d'éléments de E est une liste **ordonnée** de p éléments de E. Par exemple, $(5, 3, 7, 5)$ est une liste de 4 élements de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. On considère l'ensemble E constitué des éléments a, b et c, c'est-à-dire $E = \{a, b, c\}$.

- Écrire tous les couples (on parle aussi de 2-liste) possibles d'élements de E.
- Écrire aussi toutes les 3-listes (on parle de triplet) d'éléments de E.
- Combien y-a-t-il de 5-listes d'éléments de E ?
- Écrire aussi toutes les 3-listes d'éléments **distincts** de E.

2. Combien y-a-t-il d'entiers à trois chiffres dont tous les chiffres sont pairs ?

3. Notion de permutation.

On appelle **permutation** d'un ensemble E à n éléments, une n-liste d'élements distincts de E.

- Déterminer les permutations de $E = \{a, b, c\}$.
- Quel est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ?

4. Soit E un ensemble à n éléments. Combien y-a-t-il de p-listes d'éléments distincts[1] de E ? On pourra exprimer le résultat à l'aide de factorielles.

3 Et si l'ordre des éléments ne compte pas ? Les nombres «p parmi n».

On modélise par des ensembles et non pas par des listes car dans un ensemble l'ordre des éléments ne compte pas, ainsi l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est le même que l'ensemble $\{1, 3, 2\}$.

Le résultat principal est le suivant, nous le démontrons.

Proposition 1 *Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E à p éléments vaut*

$$\frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

1. Quelques exemples :

(a) Nombre de grilles possibles au loto : trouver les bons numéros d'une grille à 49 numéros.

(b) Combien d'équipes de Volley puis-je faire avec les 10 élèves du tremplin ?

(c) Quelle est la probabilité que deux élèves de ma classe soient nés le même jour de l'année ?

(d) Nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.

(e) Combien de palindromes à 351 chiffres ?

(f) Nombre d'entiers à 6 chiffres ayant exactement 3 chiffres pairs.

(g) On distribue cinq cartes d'un jeu de 32 cartes à un joueur, celui-ci dispose donc d'une main de 5 cartes. Comment modélise t-on une main ? Déterminer le nombre

i. de mains possibles,

ii. de mains contenant exactement 3 cartes de coeur,

iii. de mains contenant exactement 2 cartes de pique et 2 cartes de trèfle,

2. Interprétation «binomiale» des nombres «p parmi n».

On lance une pièce de monnaie 10 fois et on compte le nombre de fois où face a été obtenue. Quel est le nombre de «tirages» possibles conduisant à 3 «faces» parmi les 10 (on pourra dessiner un arbre) ?

1. On parle dans ce cas d'arrangement.

II Utilisation de la formule du binôme de Newton

Définition 2 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose* $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ *si* $0 \leqslant k \leqslant n$ *et* $\binom{n}{k} = 0$ *sinon. Ces nombres sont appelés des coefficients binomiaux.*

On sait déjà que les coefficients binomiaux sont des entiers, malgré leur «apparence de rationnels».

1 Propriété des coefficients binomiaux.

1. Donner pour $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n}$.

2. Symétrie : démontrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

3. Relation du triangle de Pascal : démontrer que $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

On déduit de cette dernière propriété un calcul récursif des coefficients binomiaux que l'on dispose dans un tableau dit triangle de Pascal.

2 La formule du binôme de Newton

1. Lorsque je développe le polynôme $(x+1)^5$, quel est le nombre de termes en x^3 ?

2. La formule :

Soit a et b des réels et $n \in \mathbb{N}$. Développer $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ puis $(a+b)^n$.

3. Développer $(x+1)^5$ et $(x-1)^5$.

4. Soit f la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2+3x^2)^{15}$. Déterminer le degré de f ainsi que son terme de degré 22.

3 Quelques sommes classiques

1. Déduire de la formule du binôme de Newton, les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

2. **(a)** Montrer que pour n et p entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$, on a $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$. En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} k\binom{n}{k}.$$

(b) Calculer aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

3. Application aux calculs des moments d'ordre 1 et 2 d'une loi binomiale

4. Polynômes de Tchébychev

(a) Déterminer un polynôme P de degré 2, tel que pour tout $x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = P(\cos x)$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(\cos x + i \sin x)^3$ puis déterminer sa partie réelle. En déduire un polynôme P de degré 3, tel que pour tout $x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) = P(\cos x)$.

III Un joli problème : distribution aléatoire de cadeaux

Des amis se réunissent. Chacun emmène un petit cadeau. On décide de distribuer à chaque personne un cadeau, mais de façon aléatoire. Les deux sous-sections permettent de répondre au questions suivantes :

- quel est le nombre moyen de personnes qui auront pour cadeau celui qu'ils ont emmené ?
- quelle est la probabilité que chaque personne obtienne un cadeau qui n'est pas celui qu'il a emmené ?

1 Nombre moyen de points fixes

On tire au hasard une permutation de $\{1,\dots,n\}$, on la note σ (on suppose que toutes les permutations de $\{1,\dots,n\}$ ont la même probabilité d'être tirées). Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si k est un point fixe pour σ (c'est-à-dire si $\sigma(k) = k$) et 0 sinon.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X_1 ? Et X_2 ?

2. Que représente la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$? En déduire le nombre moyen de points fixes d'une permutation.

2 Nombre de dérangements

On appelle dérangement de $\{1,\dots,n\}$ une permutation de $\{1,\dots,n\}$ qui n'a aucun point fixe. On note d_n le nombre de dérangements de $\{1,\dots,n\}$. On pose $d_0 = 0$.

1. Déterminer d_1, d_2, d_3.

2. Pour $k \in \{1,\dots,n\}$, on note A_k l'ensemble des permuations de S_n qui admettent exactement k points fixes.

Expliquer pourquoi $\mathrm{Card}(A_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

3. En déduire que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

4. En déduire une expression de d_n à l'aide de $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$.

5. En déduire un algorithme permettant de calculer par récurrence les nombres d_n.

6. Calculer d_{10}, en déduire la probabilté que chaque personne obtienne un cadeau différent de celui qu'il a emmené lorsqu'il y a dix personnes.

7. Comparer avec $\frac{1}{\mathrm{e}}$.