Thème n°1 : Divergence

Introduction

Les suites de nombres réels et plus généralement les suites (de nombres complexes, de fonctions, ou de matrices...) sont incontournables en Mathématiques. Donnons en vrac quelques utilisations :

- construction de nouveaux objets : nombres transcendants (nombres de Liouville), fractales (par exemple, triangle de Sierpinski), de nouvelles fonctions (fonction zeta de Riemann, fonction continue nulle-part dérivable, forme modulaire...)
- modélisation d'évolution de systèmes dynamiques, déterministes (suite de Fibonacci...) ou stochastiques (chaines de Markov...)
- permet de faire des démonstrations en propageant certaines propriétés par des passages à la limite (raisonnement par densité...). Par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires.

Les objectifs de ce texte sont de mieux appréhender la notion de divergence mais aussi d'améliorer la maîtrise technique.

I Premiers exemples

Définition 1 *Une suite est dite convergente lorsqu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, elle est dite divergente.*

Pour les exemples suivants, indiquer si u_n est le terme général d'une suite divergente.

1. $u_n = \frac{3n^4-4n+1}{2n^4-5n^2+3n}$ et $u_n = \frac{3n^5-4n+1}{n^4-5n^2+3n}$

2. $u_n = a^n$ avec $a > 0$

3. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}$

4. $u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ pour $n \geqslant 2$

5. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $u_n = (-1)^n$

6. $u_n = \frac{1}{n} + \cos n + \sqrt{n}$.

7. $u_n = \frac{n!}{2^n}$ ($n!$ désigne le nombre $1 \times 2 \times \cdots \times n$, on lit «n factorielle»)

II Sommes de termes positifs

Paul m'a dit : «en ajoutant indéfiniment des nombres positifs, on obtient des sommes aussi grandes que l'on veut».

1. L'affirmation de Paul est-elle vraie ?

Chloé m'a dit : «en ajoutant indéfiniment des nombres de plus en plus proches de 0, on ne peut pas obtenir de somme très grande».
Voici un exemple, permettant de réfléchir à l'affirmation de Chloé.

2. On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $S_n \geqslant \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite (S_n).
L'affirmation de Chloé est-elle vraie ?

Sophie m'a dit «si la somme de tous les termes d'une suite donne une valeur finie, alors cette suite tend vers 0».

3. On note (u_n) une suite, et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire $S_n - S_{n-1}$ à l'aide de u_n.

(b) On suppose que la suite (S_n) converge, démontrer que la suite (u_n) converge vers 0. L'affirmation de Sophie est-elle vraie ?

III Un peu d'algorithmique

On reprend la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Écrire une fonction `suite`(n) qui prend en argument un entier naturel non nul n et renvoie la valeur de S_n.

2. Écrire une fonction `seuil`(A) qui prend en argument un réel A et renvoie le plus petit entier n tel que $S_n \geqslant A$.

Déterminer `seuil(20)` puis `seuil(1000)`.

IV Diverger, c'est pas forcément tendre vers l'infini

Une suite qui diverge ne tend pas forcément vers l'infini. Penser à notre contre-exemple modèle : la suite de terme général $(-1)^n$. Elle diverge (elle «oscille» entre les valeurs -1 et 1) mais elle ne tend pas l'infini, puisqu'elle est bornée.

1. Un autre exemple : $u_n = \cos n$.

(a) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(n)\cos(1).$$

(b) En déduire que si $\cos n$ tend vers un réel l, alors $l = 0$.

(c) Conclure à une absurdité en utilisant la formule de duplication du cosinus (expression de $\cos 2n$ à l'aide $\cos n$).

Nous allons terminer cette section, en démontrant «proprement» que la suite de terme général $(-1)^n$ ne converge pas. On rappelle pour cela la définition suivante au programme de TS.

Définition 2 *On dit qu'une suite (u_n) tend vers un réel l si tout intervalle centré en l, contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang. Une suite est dite convergente*

On suppose que $u_n = (-1)^n$ tend vers un réel l.

2. En utilisant la définition qui précède, démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| < \frac{1}{2}.$$

En déduire que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1} - u_n| < 1$ puis conclure.

Remarque : la suite $(-1)^n$ est une suite d'entiers. On peut montrer en imitant la preuve précédente que si une suite d'entiers converge, alors elle est nécessairement stationnaire, c'est à dire constante à partir d'un certain rang. Pour s'amuser : quelle est la nature de la suite (a_n) où a_n est la n-ième décimale de $\sqrt{2}$?

V Comparaison des vitesses de divergence vers l'infini

Les quantités $\sqrt{n}, n, 4n, n^2, 2^n, n!, n^n$ tendent vers $+\infty$, mais pas toutes à la même vitesse. Comment comparer leurs vitesses de divergence ?

1. Insuffisance d'un critère par «différence»

(a) Tracer l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (x-1)^2$. Que peut-on conjecturer quant à la vitesse de divergence vers $+\infty$ des suites n^2 et $(n-1)^2$?

(b) Déterminer la limite de $n^2 - (n-1)^2$. Conclure.

(c) Déterminer la limite de $\frac{n^2}{(n-1)^2}$.

2. Un critère par «quotient»

(a) Déterminer les limites de $\frac{n^2}{2n-1}$, de $\frac{3n-1}{n}$, de $\frac{n^5}{n^n}$.

(b) Proposer une définition démarrant par : «on dit qu'une suite (u_n) est équivalente à une suite (v_n) si ...».

(c) Proposer une définition démarrant par : «on dit qu'une suite (u_n) est négligeable devant (v_n) lorsque...».

3. Une application : étude d'une branche infinie

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^5-4x+1}{x^4-5x^2+3x}$. On a déjà vu que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On veut préciser l'allure de la courbe de f en $+\infty$.

(a) Démontrer que $f(x)$ est équivalent à $3x$ au voisinage de $+\infty$.

(b) Déterminer la limite de $f(x) - 3x$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

VI Avec de la monotonie

Commençons par un exercice de vrai-faux.

1. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et essayer de justifier.

(a) Une suite strictement croissante tend nécessairement vers $+\infty$.

(b) Une suite qui tend vers $+\infty$ est nécessairement croissante.

(c) Une suite croissante et majorée est convergente.

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition 3 *Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*

On rappelle pour cela la définition suivante :

Définition 4 *Une suite (u_n) tend vers $+\infty$, si pour tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à patir d'un certain rang.*

2. Donner la définition de suite majorée puis écrire la négation de cette définition.

3. Démontrer le théorème.

VII Une suite récurrente

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0 = 1$.

1. Limite de u

(a) Écrire une fonction `suite`(n) qui prend en argument un entier naturel non nul n et renvoie la valeur de u_n.

(b) Déterminer la monotonie de la suite u. En déduire que la suite u ne peut converger vers 0.

(c) Démontrer que u tend vers $+\infty$.

2. Discret Vs Continu

L'expression $u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{(n+1)-n}$ peut être vu comme un taux d'accroissement entre deux instants consécutifs. On dit que c'est la **dérivée discrète** de u_n. Le mot «discret» est à opposer à «continu». L'expression «$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}$» a une version continue

$$f' = \frac{1}{f}.$$

(a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ strictement positive et dérivable vérifiant $f' = \frac{1}{f}$ et $f(0) = 1$. Démontrer que pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) = \sqrt{2x+1}$. En déduire que $f(x)$ est équivalent à $\sqrt{2x}$ en $+\infty$.

3. Équivalent de u_n

Nous allons démontrer que u_n est équivalent à $\sqrt{2n}$, équivalent que l'on a conjecturé grâce à la version continue.

(a) Démontrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2$ tend vers 2.
Pour n au voisinage de $+\infty$, la suite u_n^2 se comporte donc comme une suite ...

(b) En déduire à l'aide du théorème de Cesaro (théorème hors-programme même en MP, dont je vous laisse chercher l'énoncé) que u_n^2 est équivalent à $2n$. Conclure.