

Thème n°4 : cercle et quadrillage**Introduction**

Ce texte est inspiré d'un exercice posé par Roger Mansuy à ses élèves.

Nous disposons d'un cahier avec un quadrillage. On se demande si l'on peut tracer un cercle passant par au moins n sommets du quadrillage, où n est un entier arbitrairement grand. On munit le plan d'un repère orthonormé direct ayant pour origine le point O , on modélise ainsi le quadrillage comme l'ensemble des points du plan à coordonnées entières.

Un point à coordonnées entières a une affixe z de la forme $z = a + ib$ avec a et b des entiers. On dit que c'est un entier de Gauss. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers de Gauss.

I Résolution pour un «petit» nombre de points

1. Démontrer que lorsque $n \in \{2, 3, 4\}$, il est possible de contruire un cercle passant par au moins n points du quadrillage.

II Le cas général

Nous allons traiter le cas général avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note M_k le point d'affixe $z_k = z^k |z|^{n-k}$.

1. Démontrer que les points $M_1, \dots, M_n$ sont situés sur un cercle de centre O .
2. Démontrer que le produit de deux entiers de Gauss est encore un entier de Gauss.
3. Si l'on prend pour z , un entier de Gauss, les points $M_1, \dots, M_n$ sont-ils à coordonnées entières ?
4. Déterminer un entier de Gauss z dont le module est un entier.

Jusqu'à la fin de la section, on considère que z est cet entier de Gauss.

5. Justifier alors que les points $M_1, \dots, M_n$ sont bien à coordonnées entières.

Il reste à s'assurer que les points $M_1, \dots, M_n$ sont deux-à-deux distincts, pour bien avoir n points sur un même cercle.

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on note respectivement x_p et y_p les parties réelles et imaginaires de $(3 + 4i)^p$.
 - (a) Déterminer x_{p+1} et y_{p+1} en fonction de x_p et y_p .
 - (b) En déduire par récurrence que $x_p \equiv 3 \pmod{10}$ et $y_p \equiv 4 \pmod{10}$.
7. En déduire que les nombres complexes $z_1, \dots, z_n$ sont deux à deux distincts.

III Une tentative infructueuse pour $n = 5$

Peut-on généraliser notre méthode du cas $n = 4$? Par exemple, pour $n = 5$, on pourrait tracer un hexagone régulier et considérer son cercle circonscrit? Mais existe-t-il un hexagone régulier dont les sommets sont à coordonnées entières?

Nous allons voir dans cette section que la réponse est négative.

8. On pose $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Soient z et z' dans $\mathbb{Q}(i)$ avec z' non nul. Démontrer que $\frac{z}{z'}$ est encore dans $\mathbb{Q}(i)$.
9. En déduire que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ne peut s'écrire comme le quotient de deux éléments de $\mathbb{Q}(i)$ (on pourra utiliser librement que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$).
10. On suppose qu'il existe un pentagone régulier $A_1 \dots A_5$ de centre Ω dont les sommets ont des coordonnées entières. On note a, b et ω les affixes respectives des points A_1, A_2 et ω .
 - (a) Écrire le point A_1 comme l'image du point A_2 par une rotation que l'on précisera.
 - (b) En déduire une relation entre les modules et les arguments des nombres complexes $a - \omega$ et $a - b$.
 - (c) En déduire qu'il existe un réel θ que l'on déterminera tel que $a - \omega = e^{i\theta}(a - b)$.
11. On admet que si $A_1, \dots, A_5$ sont les sommets du pentagone régulier, alors le centre Ω est l'isobarycentre des points $A_1, \dots, A_5$, et donc que ω est la moyenne des affixes des A_i . Justifier ainsi que ω est à coordonnées rationnelles.
12. Conclure à une contradiction.

Pour la culture : on peut démontrer que le carré est le seul polygône régulier du plan dont les sommets sont à coordonnées entières. On peut consulter par exemple le devoir maison suivant <http://desaintar.free.fr/dm/dm10.pdf>.