Thème n°2 : l'affrontement des corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Introduction

On rappelle qu'un nombre est dit **rationnel** s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b des entiers (b non nul). On note $\mathbb{Q}$ (comme quotient) l'ensemble des nombres rationnels. Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

On se propose dans ce texte dans ce texte de mettre en lumière la relation «intimiste» entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

I Il existe des nombres irrationnels

1. Le premier exemple de nombre irrationnel est $\sqrt{2}$, sa découverte remonte à Pythagore[1]. Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

  (a) Démontrer qu'un entier naturel n est pair si et seulement si n^2 est pair.

  (b) Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q des entiers premiers entre eux, c'est-à-dire tels que 1 soit leur seul diviseur commun (on dit que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible). Conclure à une absurdité.

2. Démontrer que l'ensemble des rationnels est-stable par somme, par produit et par quotient. Et l'ensemble des irrationnels ?

3. En déduire que $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$ sont irrationnels[2].

4. Proposer d'autres nombres irrationnels puis donner une liste infinie de nombres irrationnels.

5. L'Et l'ensemble des irrationnels ?

II Reconnaître un rationnel à l'aide de son développement décimal

6. Le nombre $x = 0.99999...$ est-il égal à 1 ? Calculer $10x$ et répondre.

7. On considère $x = 0.232323....$ Démontrer que x est rationnel, on pourra calculer $100x$. Même chose avec $x = 0,564124124124 21....$ Que semble-t-on en mesure de généraliser[3] ?

8. Quel rapport avec les sommes géométriques ? Écrire 0.999999 comme une somme géométrique. Augmenter le nombre de 9 et passer à la limite.

1. Cette découverte fut à l'époque bouleversante, et on raconte que certains hommes furent tués à cette occasion.
2. On peut démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, les nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ sont presque toujours irrationnels, sauf $n \in \{1, 2, 3\}$.
3. On peut démontrer que cette propriété caractérise les nombres rationnels : un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal (propre) est périodique à partir d'un certain rang. On peut ainsi construire des nombres irrationnels, par exemple : $x = 0,123456789101112....$

III Limites de suite de rationnels, densité

Une suite de nombres rationnels peut-elle converger vers un irrationnel ? Nous allons répondre à cette question et faire même beaucoup plus.

9. On considère la suite récurrente u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$. Elle s'appelle la suite de Héron.

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

(a) Démontrer que si $x \geqslant \sqrt{2}$, alors $f(x) \geqslant \sqrt{2}$. En déduire que pour $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

(b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour $x \geqslant \sqrt{2}$, en déduire que la suite (u_n) est monotone.

(c) Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Nous allons voir que cette situation n'est pas exceptionnelle. Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 1 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) *Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

10. Démontrer que tout intervalle ouvert $]a, b[$ contient un rationnel (on pourra d'abord traiter le cas où $b - a \geqslant 1$).

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente qu'il existe une suite (r_n) de rationnels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x - r_n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Conclure.

12. Autre démonstration : on pose $x = 62,157852656$. Exprimer les nombres 62, 62.1, 62.15 à l'aide de x et de partie entière, en déduire une formule pour l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut. Généraliser et démontrer à nouveau le théorème.

13. Démontrer que tout réel est aussi limite d'une suite d'irrationnels.

IV Une équation fonctionnelle et un joli raisonnement par densité

La fonction exponentielle transforme les sommes en produit, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

Le but de cette section est de déterminer toutes les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui transforment les sommes en sommes (on dit additive), c'est-à-dire vérifiant l'équation :

$$(E) : \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On dit que (E) est une **équation fonctionnelle** car l'inconnue n'est pas un nombre mais une fonction. On cherche des fonctions ! Aussi surprenant que cela puisse paraître, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ va être capitale...

14. Démontrer qu'une fonction linéaire est solution de (E).

On veut maintenant prouver la réciproque. On considère f une solution de (E), et on veut montrer que f est linéaire.

On fixe un réel x.

15. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(nx) = nf(x)$.

16. Démontrer que $f(0) = 0$ puis que pour tout $a \in \mathbb{R},\ f(-a) = -f(a)$.

17. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.

18. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $f(\frac{x}{p}) = \frac{f(x)}{p}$, en déduire que pour tout rationnel r on a $f(rx) = rf(x)$.

19. Conclure (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

V Y-a-t-il plus de rationnels ou d'irrationnels ?

Comment comparer la taille d'ensembles infinis ? C'est ce que nous ferons dans un prochain thème en utilisant la notion de **bijection** et d'ensemble dénombrable. Nous allons nous «contenter» dans ce texte de montrer que $\mathbb{R}$ est tout de même assez gros, puisque ces éléments ne peuvent pas être numérotés. Nous allons précisément démontrer[4] qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$[0, 1] = \{x_n \mid \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

On découpe alors $[0, 1]$ en trois segments de même longueur. Un de ces segments noté I_0 ne contient pas x_0 (si on avait découpé en deux segments, x_0 pouvait appartenir aux deux !!). On continue, on découpe I_0 en trois, et on choisit I_1 de sorte qu'il ne contienne pas x_1. On réitère... on raisonne par récurrence : on suppose construit I_n un segment de $[0, 1]$ ne contenant pas x_n de longueur $\frac{1}{3^{n+1}}$. On le découpe en trois segments de même longueur. Un de ces segments noté I_{n+1} ne contient pas x_{n+1} et est de longueur $\frac{1}{3^{n+2}}$, ce qui prouve l'hérédité. Les segments I_n ainsi construits ne contiennent pas x_n. On note a_n et b_n les extrémités du segment I_n, c'est-à-dire $I_n = [a_n, b_n]$.

20. Donner la monotonie des suites (a_n) et (b_n), en déduire qu'elles sont convergentes puis qu'elles convergent vers un même réel l.

21. Justifier que $x \in [0, 1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant x \leqslant b_n$. Conclure à une contradiction.

4. Ce résultat n'est pas trivial et fut prouvé par Georg Cantor en 1874. Ce résultat est énoncé sous la forme suivante : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.