

Polygones réguliers et quadrillages

Arnaud de Saint Julien - MPSI Lycée La Merci

3 avril 2015

Un écolier doit construire en classe un triangle équilatéral et un carré, à l'aide d'une règle et d'un compas. Il a oublié son compas mais dispose d'une feuille quadrillée. Peut-il encore réaliser les constructions demandées ?

Ce texte se propose plus généralement de déterminer dans le plan muni d'un repère orthonormal, les polygones réguliers dont les sommets sont à coordonnées entières.

1 Le cas instructif du triangle équilatéral

L'écolier pourra bien sûr construire un carré en prenant par exemple pour sommets les points de coordonnées $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$, mais il ne pourra pas construire son triangle équilatéral. En voici deux preuves instructives, l'une utilisant l'écriture complexe d'une rotation et l'autre l'aire d'un triangle ainsi que le déterminant.

Proposition 1 *Il n'existe pas de triangle équilatéral dans le plan à coordonnées rationnelles*

Preuve :

1. Notons MNP notre triangle équilatéral que l'on peut supposer direct. Alors P est l'image de N par la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$. En notant m, n, p les affixes des points M, N, P , on obtient $p - m = e^{\frac{i\pi}{3}}(n - m)$ d'où

$$\frac{p - m}{n - m} = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Comme M, N, P sont à coordonnées entières, leurs affixes m, n, p sont dans $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et donc

$$\frac{p - m}{n - m} \in \mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\};$$

d'après l'identité suivante

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Mais alors $e^{\frac{i\pi}{3}} \in \mathbb{Q}(i)$, ce qui est faux car $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. Proposons une autre preuve à l'aide de l'aire du triangle MNP .

Si on note a la longueur commune des arêtes, d'après le théorème de Pythagore, la longueur des hauteurs vaut $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle vaut donc $\frac{a \times h}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

D'autre part, l'aire $\mathcal{A}$ vaut aussi $\frac{|\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})|}{2}$.

Comme les points M, N et P sont à coordonnées entières, il en est de même des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ et donc du déterminant $\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$. Ainsi $\mathcal{A}$ est rationnel, donc $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ aussi mais comme $a^2 = \|\overrightarrow{MN}\|^2 \in \mathbb{Q}$, on obtient que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, contradiction.

■

On voit donc que la question de la rationalité des nombres $\cos \frac{\pi}{3}$ ou $\sin \frac{\pi}{3}$ est cruciale.

2 Irrationalité des nombres $\cos(\frac{\pi}{n})$

Dans cette section, nous allons voir que les nombres $\cos \frac{\pi}{n}$ sont presque toujours irrationnels. Pour cela, à l'aide des polynômes de Tchebychev, nous montrerons qu'ils sont racines de polynômes à coefficients entiers, puis nous utiliserons le critère classique qui renseigne les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

2.1 Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

Proposition 2 (Racines rationnelles) Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients entiers. Si $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle de P avec p et q premiers entre eux, alors p divise a_0 et q divise a_n .

En particulier si P est unitaire, ses racines rationnelles potentielles sont entières.

Preuve : On a $a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0$, d'où en multipliant par q^n ,

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$$

En particulier

$$\begin{aligned} a_np^n &= -(a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q) \\ &= -q(a_0q^{n-1} + a_1pq^{n-2} + a_2p^2q^{n-3} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}). \end{aligned}$$

L'entier q divise donc a_np^n . Comme p et q sont premiers entre eux, q est premier avec p^n , on en déduit par le théorème de Gauss que q divise a_n .

De même, on a

$$\begin{aligned} a_0q^n &= -(a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n) \\ &= -p(a_1q^{n-1} + a_2pq^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-2}q + a_np^{n-1}) \end{aligned}$$

L'entier p divise donc a_0q^n . On conclut de même par théorème de Gauss que p divise a_0 . ■

2.2 Polynômes de Tchebychev

Théorème 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique polynôme T_n à coefficients entiers de degré n vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos \theta).$$

Le polynôme T_n est appelé polynôme de Tchebychev d'indice n .

Preuve :

1. Existence : le réel $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$. On va développer par la formule du binôme de Newton et distinguer les termes d'indice pair et impairs de la somme en remarquant que $i^{2p} = (-1)^p$ et $i^{2p+1} = i(-1)^p$.

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^{n-k} \times i^k (\sin \theta)^k \\ &= \sum_{k=0, k=2p}^n \binom{n}{2p} (\cos \theta)^{n-2p} \times (-1)^p (\sin \theta)^{2p} \\ &\quad + i \sum_{k=0, k=2p+1}^n \binom{n}{2p+1} (\cos \theta)^{n-(2p+1)} \times (-1)^p (\sin \theta)^{2p+1} \end{aligned}$$

Lorsque $0 \leq k \leq n$ et $n = 2p$ alors $0 \leq p \leq \frac{n}{2}$ et $0 \leq p \leq E(\frac{n}{2})$ puisque p est un entier.

Ainsi, en prenant la partie réelle, on a

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (-1)^p (\sin^2 \theta)^p \\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (-1)^p (1 - \cos^2 \theta)^p \\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (\cos^2 \theta - 1)^p.\end{aligned}$$

Le polynôme

$$P = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} X^{n-2p} (X^2 - 1)^p$$

est bien à coefficients entiers et vérifie

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = P(\cos \theta).$$

2. Unicité : soit Q un autre polynôme vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = Q(\cos \theta).$$

On a alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos \theta) = Q(\cos \theta)$ donc $(P - Q)(\cos \theta) = 0$. Or lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $\cos \theta$ décrit $[-1, 1]$. Le polynôme $P - Q$ s'annule donc sur l'intervalle $[-1, 1]$, en particulier il s'annule une infinité de fois, il est donc le polynôme nul et donc $P = Q$, d'où l'unicité.

■

Les polynômes de Tchebychev vérifient une relation de récurrence d'ordre deux.

Proposition 4 (Relation de récurrence) On a $T_0 = 1, T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Preuve : Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arccos x$. Puisque $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ on a

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

La formule de trigonométrie $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$ avec $a = (n+1) \arccos x$ et $b = \arccos x$ donne :

$$\begin{aligned}T_{n+2}(x) + T_n(x) &= \cos((n+2) \arccos x) + \cos(n \arccos x) \\ &= \cos((n+1) \arccos x + \arccos x) + \cos((n+1) \arccos x - \arccos x) \\ &= 2 \cos((n+1) \arccos x) \cos(\arccos x) \\ &= 2T_{n+1}(x) \times x\end{aligned}$$

On pose alors $Q = T_{n+2} - 2XT_{n+1} - T_n$. Ce polynôme Q est nul car s'annule sur $[-1, 1]$ donc une infinité de fois. On obtient donc

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

■

Voici une suite d'instructions Maple permettant de calculer les huit premiers polynômes de Tchebychev.

```

> T[0]:=1; T[1]:=X;
> for n from 0 to 7 do
>   T[n+2]:=expand(2*X*T[n+1]-T[n]);
> od;

```

$$T_0 := 1$$

$$T_1 := X$$

$$T_2 := 2X^2 - 1$$

$$T_3 := 4X^3 - 3X$$

$$T_4 := 8X^4 - 8X^2 + 1$$

$$T_5 := 16X^5 - 20X^3 + 5X$$

$$T_6 := 32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1$$

$$T_7 := 64X^7 - 112X^5 + 56X^3 - 7X$$

La commande `expand` permet d'obtenir l'expression développée et réduite des polynômes.

2.3 Les théorèmes principaux

Pour tout réel θ , on a $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, donc en particulier $T_n(\cos \frac{\pi}{n}) = \cos \pi = -1$ donc $\cos \frac{\pi}{n}$ est racine de $T_n + 1$ qui est bien à coefficients entiers, mais n'est pas unitaire.

En observant bien la liste des polynômes de Tchebychev, on voit que les coefficients des termes de degré $k \geq 1$ sont des multiples de 2^{k-1} . Par exemple, on a

$$T_5 + 1 = 2^4 X^5 - 5 \times 2^2 X^3 + 5 \times 2^0 X + 1.$$

Mais alors en multipliant par 2, on obtient

$$2(T_5 + 1) = 32X^5 - 40X^3 + 10X + 2 = (2X)^5 - 5 \times (2X)^3 + 5 \times (2X) + 2 \text{ et donc } 2(T_5 + 1) = Q(2X) \text{ avec } Q(Y) = Y^5 - 5Y^3 + 5Y + 2.$$

Puisque $\cos \frac{\pi}{5}$ est racine de $T_5 + 1$, le réel $2 \cos \frac{\pi}{5}$ est racine de Q à coefficients entiers, mais en étant de plus unitaire.

Le lemme suivant généralise l'exemple, et va nous permettre de démontrer les théorèmes principaux.

Lemme 5 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme Q_n à coefficients entiers, unitaire et de degré n tel que*

$$2(T_n(X) + 1) = Q_n(2X).$$

Preuve : On fait une preuve par récurrence sur l'entier n , en notant $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence.

▷ $HR(1)$ est vraie car $2(T_1 + 1) = 2(X + 1) = 2X + 2 = Q_1(2X)$ avec $Q_1(Y) = Y + 2$.

▷ $HR(2)$ est vraie car $2(T_2 + 1) = 2(2X^2 - 1) = (2X)^2 - 2 = Q_2(2X)$ avec $Q_2(Y) = Y^2 - 2$.

▷ Supposons $HR(k)$ vraie pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ avec $n \geq 2$. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Tchebychev, on a

$$\begin{aligned}
2(T_{n+1} + 1) &= 2(2XT_n - T_{n-1} + 1) \\
&= 4XT_n - 2T_{n-1} + 2 \\
&= 2X \times 2(T_n + 1) - 4X - 2(T_{n-1} + 1) + 4 \\
&= 2X \times Q_n(2X) - Q_{n-1}(2X) - 2 \times (2X) + 4 \\
&= Q_{n+1}(2X)
\end{aligned}$$

avec

$$Q_{n+1}(Y) = YQ_n(Y) - Q_{n-1} - 2Y + 4.$$

Puisque $\deg Q_n = n$ et $\deg Q_{n-1} = n-1$ et que Q_n est unitaire, le terme de plus haut degré de Q_{n+1} vaut X^{n+1} . Enfin comme Q_n et Q_{n-1} sont à coefficients entiers, il en est de même pour Q_{n+1} , ce qui prouve $HR(n+1)$. ■

Théorème 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le réel $\cos \frac{\pi}{n}$ est rationnel si et seulement si $n \in \{1, 2, 3\}$.

Preuve : On a déjà vu que $\cos \frac{\pi}{n}$ est racine de $T_n + 1$ donc d'après le lemme, $a = 2 \cos \frac{\pi}{n}$ est racine de Q_n à coefficients entiers et unitaire.

Le cas $n = 1$ est réglé puisque $\cos \pi = -1$.

Supposons que $\cos \frac{\pi}{n}$ est rationnel et $n \geq 2$. Alors a étant rationnel, par le critère 2, a est nécessairement un entier. Mais a est borné par 2 et pour $n \geq 2$, $a \geq 0$. Donc $a \in \{0, 1, 2\}$.

- si $a = 0$, alors $\cos \frac{\pi}{n} = 0$ et $n = 2$.
- si $a = 1$, alors $\cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}$ et $n = 3$.
- si $a = 2$, alors $\cos \frac{\pi}{n} = 1$, ce qui est impossible.

Réciproquement $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ sont bien rationnels. ■

Théorème 7 (Raffinement) Soit p et q deux entiers premiers entre eux. Le réel $\cos \frac{p\pi}{q}$ est rationnel si et seulement si $q \in \{1, 2, 3\}$.

Preuve : Si $q \in \{1, 2, 3\}$, on vérifie que $\cos \frac{p\pi}{q} \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, supposons que $\cos \frac{p\pi}{q} \in \mathbb{Q}$. D'après Bezout, il existe des entiers u et v tels que $pu + qv = 1$ d'où $\frac{p}{q}u + v = \frac{1}{q}$. Alors

$$\cos \frac{\pi}{q} = \cos \left(\frac{p\pi}{q}u + v\pi \right) = (-1)^v \cos \left(\frac{pu\pi}{q} \right) = (-1)^v T_{|u|} \left(\cos \frac{p\pi}{q} \right);$$

où $T_{|u|}$ est le polynôme de Tchebychev d'indice $|u|$. Comme $T_{|u|} \in \mathbb{Z}[X]$ et $\cos \frac{p\pi}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $\cos \frac{\pi}{q} \in \mathbb{Q}$ et donc $q \in \{1, 2, 3\}$. ■

Remarque 1 (Et pour sinus ?) On peut déduire des résultats précédents que

$$\sin \frac{\pi}{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 6\}.$$

Remarque 2 (Preuve cyclotomique) On peut aussi montrer rapidement que si $e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathbb{Q}(i)$ alors $n = 4$ en utilisant la théorie des corps cyclotomiques, voir par exemple le livre de Perrin [1]. En effet, si $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est dans $\mathbb{Q}(i)$, alors les extensions $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(\zeta)$ seraient égales et comme leur degré au dessus de $\mathbb{Q}$ vaut respectivement 2 et $\phi(n)$ avec ϕ la fonction indicatrice d'Euler, on aurait $\phi(n) = 2$, ce qui ne se produit que pour $n \in \{3, 4, 6\}$. On écarte ensuite les cas $n = 3$ et $n = 6$.

Remarque 3 (Arithmétique des entiers de Gauss) On peut donner une troisième preuve en utilisant l'arithmétique de l'anneau euclidien $\mathbb{Z}[i]$ (voir à nouveau Perrin [1], pour une preuve du caractère euclidien). En effet $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est racine de $X^n - 1$, polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$. Si $\zeta \in \mathbb{Q}(i)$, alors ζ est «rationnelle» dans $\mathbb{Z}[i]$, c'est à dire quotient de deux entiers de Gauss. Si $\zeta = \frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers de Gauss premiers entre eux, en utilisant le critère 2 réservé aux entiers qui se généralise mot pour mot aux entiers de Gauss, on obtient que p et q divisent 1, donc sont inversibles dans $\mathbb{Z}[i]$ donc valent ± 1 ou $\pm i$, ce qui donne que ζ est une racine 4-ième de l'unité et donc $n = 4$.

3 Polygones réguliers entiers

3.1 Polygones réguliers entiers du plan

Théorème 8 *Le carré est le seul polygone régulier du plan à coordonnées entières.*

Preuve : Bien sûr le carré convient.

Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier à coordonnées entières et Ω son centre. Ses coordonnées sont obtenues comme moyenne des coordonnées des sommets, donc le point Ω est à coordonnées rationnelles. Son affixe ω est donc dans $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Si M et M' sont deux sommets d'une même arête, quitte à les rebaptiser, on peut supposer que M' est l'image de M par une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ où n est le nombre de sommets. Ainsi si z et z' sont les affixes de M et M' , on a

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\frac{2\pi}{n}};$$

et donc $e^{i\frac{2\pi}{n}} \in \mathbb{Q}(i)$ car z, z' et ω sont dans le corps $\mathbb{Q}(i)$, stable par soustraction et quotient. On en déduit que

$$\cos \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Q}.$$

▷ Si n est pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et donc $\cos \frac{2\pi}{n} = \cos \frac{\pi}{p} \in \mathbb{Q}$. Ainsi d'après le théorème 7, $p \in \{1, 2, 3\}$. Comme $n \geq 3$, $p > 1$. Si $p = 3$, alors $\sin \frac{2\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc la seule possibilité est $p = 2$, c'est-à-dire $n = 4$, le cas du carré qui est possible.

▷ Si n est impair, $n \geq 3$, il est donc premier avec 2, donc d'après le théorème 7, la seule possibilité est $n = 3$, mais alors $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$, ce qui est impossible. ■

Remarque 4 Si l'on rajoute un compas, un écolier peut toutefois construire un triangle équilatéral, le quadrillage étant certes superflu. On peut alors se demander quels sont les polygones réguliers que l'on peut construire à la règle et au compas. Ce problème est beaucoup plus difficile à résoudre dans toute sa généralité. Il est par exemple possible de construire un pentagone régulier car $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

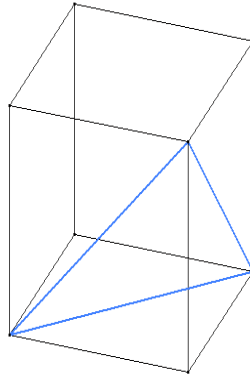
On peut démontrer¹, voir par exemple le livre de Carréga [3], que l'on peut seulement construire à la règle et au compas les polygones réguliers à n côtés où n est le produit de puissances de 2 ou de nombres premiers de Fermat distincts (c'est à dire de la forme $F_k = 2^{2^k} + 1$ pour $k = 1 \dots 5$).

3.2 Et dans l'espace ?

Si l'on se place dans $\mathbb{R}^3$, grâce à sa dimension supplémentaire, le triangle équilatéral à coordonnées entières devient possible, en prenant par exemple les diagonales de 3 faces adjacentes du cube unité : les points $M_0 = (1, 0, 0)$, $M_1 = (0, 1, 0)$, $M_2 = (1, 1, 1)$ forment le triangle $M_0M_1M_2$ dont les arêtes mesurent $\sqrt{2}$.

1. Donnons les grandes lignes de la démonstration : le problème revient à construire la racine n -ième de l'unité $\zeta_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

- Grâce à Bezout, on peut se ramener au cas où $n = p^k$ est une puissance d'un nombre premier p
- Le degré de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ vaut $\phi(n)$ où ϕ est l'indicatrice d'Euler. On a $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
- Une condition suffisante pour être constructible est que le degré soit une puissance de 2. La condition $2^q = p^{k-1}(p-1)$ implique alors que $p = 2$ ou ($k = 1$ et $p = 1 + 2^q$).
- Pour la réciproque, il suffit de montrer que $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est une suite finie d'extensions quadratiques. Pour cela, on utilise la théorie de Galois décrivant un miroir entre les extensions intermédiaires de $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ et les sous-groupes du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ qui est abélien et de cardinal $\phi(n) = 2^q$. On conclut en montrant que si G est un groupe de cardinal 2^q , il existe une décomposition $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_s \subset G$ avec $[G_{i+1} : G_i] = 2$.

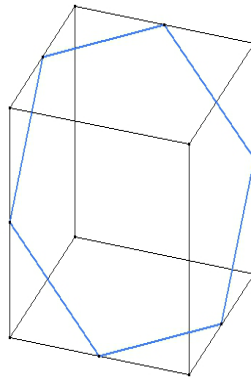


L'hexagone régulier à coordonnées entières est aussi possible en joignant les milieux des arêtes adjacentes du cube $[0, 2]^3$.

$$A_1 = (2, 1, 0); A_2 = (1, 2, 0); A_3 = (0, 2, 1); A_4 = (0, 1, 2); A_5 = (1, 0, 2); A_6 = (2, 0, 1).$$

Les points sont bien coplanaires car dans le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 3$ et chaque arête mesure $\sqrt{2}$.

Nous allons voir qu'il n'y en a pas d'autres.



Théorème 9 Les polygones réguliers à coordonnées entières de l'espace $\mathbb{R}^p$ avec $p \geq 3$ sont : le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier.

Preuve :

Le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier à coordonnées entières sont possibles dans $\mathbb{R}^3$, donc dans $\mathbb{R}^p$ avec $p \geq 3$, puisqu'on peut plonger naturellement $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^p$, en rajoutant des coordonnées nulles.

Prouvons la réciproque. Dans l'espace, nous ne pouvons plus utiliser les nombres complexes, mais nous disposons du produit scalaire qui relie angles et longueurs. Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier à coordonnées entières à n côtés et Ω son centre. Soit $[MM']$ une arête de $\mathcal{P}$. Les vecteurs $x = \overrightarrow{\Omega M}$ et $y = \overrightarrow{\Omega M'}$ ont même norme et leur angle mesure (en valeur absolue) $\frac{2\pi}{n}$. On a $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \frac{2\pi}{n}$ et donc

$$\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}.$$

Comme les points M et M' sont à coordonnées entières, et que le centre Ω est à coordonnées rationnelles, les vecteurs x et y sont à coordonnées rationnelles. On en déduit que les réels $\langle x, y \rangle$, et $\|x\|^2$ sont rationnels, et donc $\cos \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Q}$.

Si n est impair, il est premier avec 2, et donc d'après le théorème 7, $n = 3$ puisque $n \geq 3$.

Si n est pair, $n = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et donc $\cos \frac{2\pi}{n} = \cos \frac{\pi}{q} \in \mathbb{Q}$. Ainsi d'après le théorème 7, $q \in \{1, 2, 3\}$ donc $n \in \{4, 6\}$. ■

Corollaire 10 Parmi les polyèdres réguliers de $\mathbb{R}^3$ (et plus généralement de $\mathbb{R}^p$ avec $p \geq 3$), seuls le tétraèdre, le cube et son dual l'octaèdre peuvent être à coordonnées entières.

Preuve : Nous admettons ici (voir par exemple le livre de Michèle Audin [2]) qu'il y a cinq polyèdres réguliers :

- le tétraèdre régulier
- le cube
- l'octaèdre qualifié parfois de «diamant», obtenu comme dual du cube, c'est à dire que ses sommets sont les centres des faces d'un cube.
- le dodécaèdre, formé de douze pentagones réguliers
- l'isocaèdre, formé de 20 triangles équilatéraux, dual du dodécaèdre.

Le cube peut bien sûr être à coordonnées entières. Le tétraèdre aussi, il suffit de rajouter le point $M_3 = (0, 0, 1)$ au triangle équilatéral $M_0M_1M_2$ ci-dessus.

Pour l'octaèdre, on prend un cube à coordonnées entières et on considère son dual, l'octaèdre dont les sommets sont les centres des faces du cube. Les coordonnées des sommets sont donc les moyennes des coordonnées du cube donc à coordonnées rationnelles. On effectue alors une homothétie de centre 0 et de rapport 2, et on obtient bien un octaèdre à coordonnées entières.

S'il existait un dodécaèdre à coordonnées entières, alors ses faces seraient des pentagones réguliers de $\mathbb{R}^3$ à coordonnées entières ce qui est impossible. Il n'existe donc pas non plus d'isocaèdre à coordonnées entières puisqu'il est le dual du dodécaèdre. ■

Références

- [1] Perrin Daniel, Cours d'algèbre, Ellipses (1996)
- [2] Audin Michèle, Géométrie, Belin (1998)
- [3] Carréga Jean-Claude, Théorie des corps, Hermann (2001)