

CHAPITRE 4

Du chaos à la beauté

La beauté en mathématiques

C'est Bertrand Russell qui écrivait en 1918, dans son livre *Mysticisme et Logique*, que

« les mathématiques, si on les regarde comme il faut, possèdent non seulement la vérité, mais une suprême beauté — une beauté froide et austère, comme celle de la sculpture. »

Un autre célèbre mathématicien britannique, G. H. Hardy, écrivait dans son livre *A mathematician's Apology* (1940) :

« Les schémas du mathématicien, comme ceux du peintre ou du poète, doivent être beaux, les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent être associées d'une manière harmonieuse. La beauté est le premier test ; il n'y a pas de place stable dans le monde pour des mathématiques laides ... Il peut être très difficile de définir la beauté mathématique, mais c'est vrai pour la beauté en général — nous ignorons peut-être ce que nous appelons au juste un beau poème, mais cela ne nous empêche pas de le reconnaître quand nous en lisons un. »

Les deux auteurs pensaient ici à une forme hautement abstraite de beauté, une beauté intérieure bien connue de tous les mathématiciens professionnels, mais qui, pour la grande majorité d'entre nous, demeure pour toujours invisible et n'apparaît probablement jamais même en rêve. C'est la beauté des formes logiques et des structures, de l'élégance des preuves, une beauté qui ne peut être entrevue qu'après avoir suivi un long et difficile apprentissage.

Ou du moins tel était le cas jusqu'aux premières années 1980, lorsque le développement de l'ordinateur, et en particulier de ses facilités graphiques, donna naissance à de nouveaux développements mathématiques qui changèrent tout cela. *Dynamique chaotique* est l'un des noms qui ont été proposés pour un nouveau secteur des mathématiques ouvert par l'ordinateur. Bien qu'une partie des mathématiques impliquées par ce domaine soit aussi difficile et abstraite que les

A black and white photograph of a dense, intricate pattern, likely a textile or paper design. The pattern is highly detailed and covers the entire visible area. It features repeating floral and scroll motifs, with a central circular element that appears to be a stylized sun or flower. The overall effect is a complex, textured surface with a high degree of symmetry and repetition.

des sortes de structures (Beaucoup d'entre elles peuvent être produites en lumière des motifs qui n'apparaissent pas en noir et blanc.) Si remarquable qu'elle puisse paraître, la complexité de la figure 8 résulte de mathématiques tout à fait simples (encore qu'une analyse détaillée puisse impliquer des méthodes très avancées). Ces mathématiques-là sont expliquées dans ce chapitre.

Quelle est la longueur des côtes bretonnes ?

Telle était la question posée dans un article qui portait le même titre et qui a fait époque en 1967 dans le magazine *Science*. L'auteur était Benoît Mandelbrot, brillant mathématicien français, travaillant au centre de recherches Thomas J. Watson d'IBM, à Yorktown Heights, New York. A première vue la question semble assez innocente, et on pourrait espérer obtenir une bonne réponse à l'aide d'une carte ou par une reconnaissance aérienne. Le seul ennui est que, si soigneusement que vous opéreriez, vous n'obtiendrez pas la bonne réponse. Et pour cause : il n'y a pas de bonne réponse. Mandelbrot arrivait à cette conclusion stupéfiante en raisonnant de la façon suivante.

Faisiez votre mesure en survolant la côte dans un avion à l'altitude constante, en comptant constamment la côte, et en mesurant la longueur de la ligne de vue.

Supposez maintenant que vous opéreriez à pied en mesurant la longueur de côte à l'aide de pointes distantes de, disons, 1 mètre. Alors des détails que l'on ne pouvait voir de l'avion produiraient une réponse encore plus grande. Si la mesure est répétée avec des pointes distantes de 10 centimètres le résultat augmenterait encore. Et ainsi de suite. Chaque fois que l'on choisit une échelle plus fine, davantage de détails se montrent et votre réponse augmente. Bientôt vous mesurerez autour des galets, puis autour des grains de sable, puis des molécules, etc. Et votre réponse ne cessera de croître.

Bien entendu, dans le monde physique ce processus consistant à prendre des mesures de plus en plus fines doit finalement se terminer. Les limitations humaines nous amèneraient probablement à vous arrêter à 1 mètre, tandis que le physicien pourrait soutenir que la procédure a une limite théorique au niveau atomique. Mais

du point de vue idéalisé du mathématicien l'idée de faire des mesures de plus en plus fines peut être poursuivie indéfiniment. Comme cela signifie que la suite des mesures correspondantes s'allonge indéfiniment, il s'ensuit qu'il n'y a pas de notion *mathématiquement précise* de la longueur d'une côte, mais seulement des choix arbitraires — choix qui ne sont pas même des approximations de quelque réponse « réelle ».

Un analogue mathématique idéalisé de la fuyante longueur de côte de Mandelbrot est fourni par une figure géométrique d'abord considérée par H. von Koch en 1904, que nous appellerons l'*île de Koch*. La figure 9 (i) montre l'île de Koch telle qu'on la voit d'une fusée spatiale. A cette distance elle apparaît juste comme un triangle équilatéral. Quand la fusée se rapproche de la Terre, il devient clair que chacun des segments de droite qui constituent les côtés contient en réalité un promontoire central triangulaire qui occupe le tiers médian du côté (Fig. 9 (ii)). Si le périmètre de la figure 9 (i) vaut 3 unités, alors celui de la figure 9 (ii) vaudra $3 \times (4/3)$ unités.

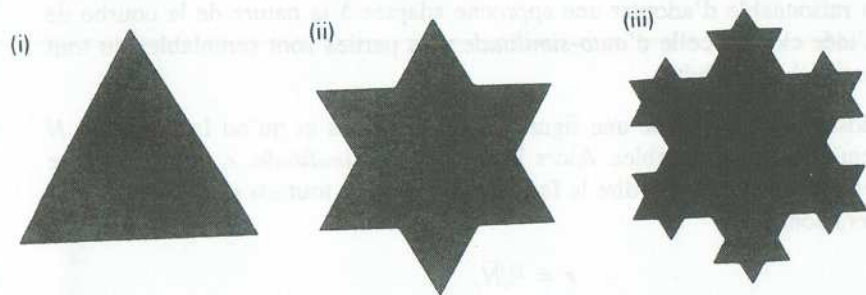


Fig. 9 — Construction de l'île de Koch

En vous approchant encore, vous constatez que chacun des douze côtés rectilignes que vous aviez avant contient lui aussi un promontoire en forme de triangle équilatéral occupant le tiers médian (Fig. 9 (iii)). Le périmètre est maintenant $3 \times (4/3) \times (4/3)$. La figure 10 montre l'île telle qu'on la verrait de beaucoup plus près, après la révélation de plusieurs degrés de détails supplémentaires, et donne une indication sur la vraie (?) forme de l'île de Koch.

Pour le mathématicien, le caractère séduisant de l'exemple de Koch est la régularité avec laquelle apparaissent les différents degrés de détail. A chaque étape, le tiers médian de chacun des segments rectilignes de la côte est remplacé par deux segments tous deux de même longueur que ce tiers, comme le montre la figure 11.

Comme vous pouvez le présumer d'après les figures 9 et 10, l'île de Koch a une forme mathématiquement bien définie, dont la figure 10 donne une approximation assez bonne pour l'œil humain. La *côte* mathématiquement précise de l'île de Koch est la « courbe » qui est la limite de ses approximations successives, dont la figure 9

donne les trois premières. C'est là que les mathématiques prennent le relais du cartographe humain. *Mathématiquement*, cette courbe limite est déterminée d'une façon précise, et comme toute autre courbe elle consistera en une infinité de points assemblés de manière à former une « ligne ». Le processus pour arriver à la courbe limite est analogue à celui qui arrive au nombre $1/3$ comme limite de la suite infinie des nombres décimaux

0,3 0,33 0,333 0,3333 0,33333 ...

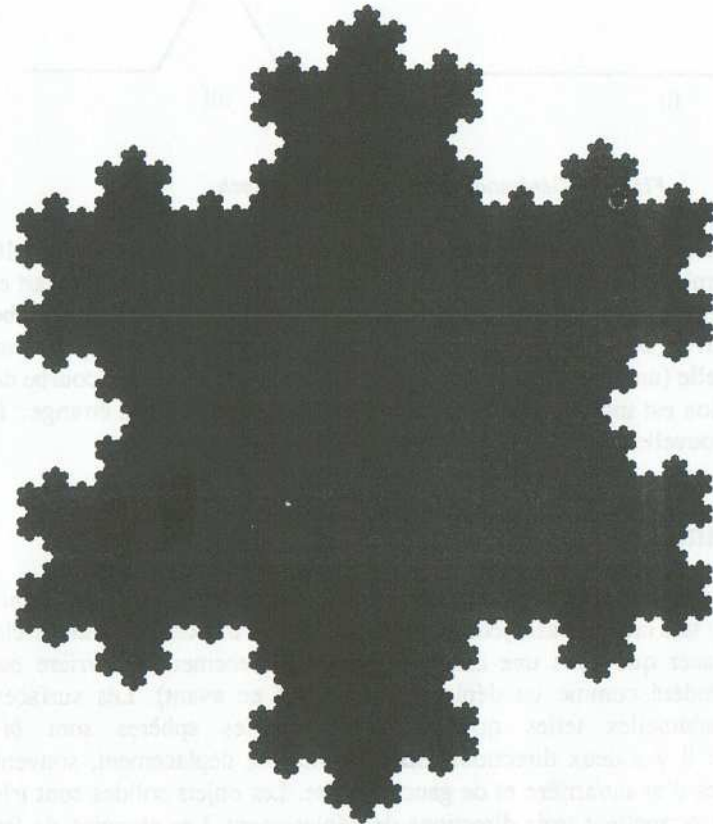


Fig. 10 — L'île de Koch prenant forme

Puisque l'île de Koch est une région mathématiquement définie du plan, elle aura une aire définie. La valeur numérique de cette aire dépendra des unités de mesure utilisées, bien entendu, mais elle sera certainement *finie*. (On peut la calculer comme limite d'une suite de nombres, un peu comme le $1/3$ de l'exemple ci-dessus ; elle est, en fait, exactement 1,6 fois l'aire du triangle de la figure 9 (i).) Que peut-on dire de la longueur de la côte entourant cette aire ? Eh bien, chacune des étapes

successives du processus de Koch multiplie la longueur de la « côte » par un facteur $4/3$. Quand la *courbe de Koch* (comme on appelle la côte limite) est atteinte, ce facteur $4/3$ aura opéré une infinité de fois, et par conséquent la longueur de la courbe de Koch sera infinie.

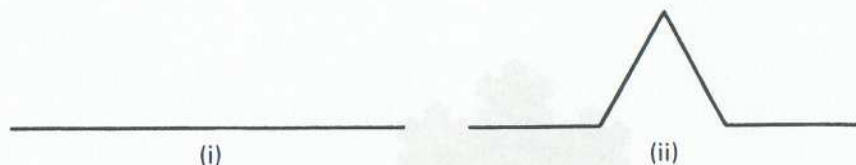


Fig. 11 — Génération de la côte de l'île de Koch

Comment une aire finie peut-elle avoir une frontière infinie ? Les figures 9 et 10 elles-mêmes fournissent la réponse. La courbe frontière se contorsionne de part et d'autre sur toute sa longueur. Pour chacune des approximations finies de la courbe finale, vous pouvez dessiner complètement cette contorsion pourvu que vous utilisiez une échelle (un agrandissement) convenable, mais pour la vraie courbe de Koch la contorsion est infinie, et alors il arrive quelque chose de très étrange : il s'introduit une nouvelle dimension.

Nouvelles dimensions

Les courbes que l'on rencontre habituellement en géométrie sont toutes *uni-dimensionnelles* : une créature assujettie à vivre sur, disons, une droite ou un cercle ne peut se déplacer que dans une direction (si un déplacement en arrière est simplement considéré comme un déplacement négatif en avant). Les surfaces géométriques habituelles telles que les plans ou les sphères sont *bi-dimensionnelles* : il y a deux directions indépendantes de déplacement, souvent définies en termes d'avant/arrière et de gauche/droite. Les objets solides sont *tri-dimensionnels* et permettent trois directions de déplacement. Les chemins de fer sont un exemple de mouvement restreint à une dimension, les bateaux peuvent naviguer dans deux dimensions à la surface de la mer, et les avions peuvent se mouvoir dans trois dimensions.

Du point de vue de l'expérience humaine, il n'y a que trois dimensions dans l'univers où nous vivons (encore que la théorie de la relativité regarde le temps comme une « quatrième dimension », et que certaines théories physiques actuelles assignent à l'univers onze dimensions, les trois auxquelles nous sommes habitués plus huit autres qui se manifestent comme les forces fondamentales de la nature, gravité, magnétisme, etc.). Mais pour le mathématicien la « tri-dimensionnalité » n'a rien de spécial. Des « espaces » à quatre dimensions peuvent être considérés, et le sont effectivement d'une manière courante. Bien qu'ils ne se prêtent pas à la

représentation géométrique traditionnelle, de tels espaces peuvent être d'un réel intérêt pratique (un exemple de cela est fourni par le sujet connu sous le nom de programmation linéaire, qui sera considéré au chapitre 11). Mais remarquez que ces « dimensions supérieures » sont toujours des nombres entiers.

Qu'est-ce que la côte de l'île de Koch a à voir avec tout cela ? Comme il s'agit d'une courbe (au sens mathématique, bien qu'avec ses contorsions infinies vous ne puissiez pas espérer la tracer), on pourrait croire qu'elle est uni-dimensionnelle, mais il n'en est rien. Bien que chacune des approximations de la courbe de Koch obtenues par le procédé décrit plus haut soit uni-dimensionnelle, la courbe limite ne l'est pas. Avec une direction qui change infiniment souvent, nous ne sommes plus dans un monde familier — en réalité cet emploi du mot « direction » ne peut pas vraiment se justifier. Nous ne pouvons donc pas décider de la dimensionnalité de la courbe de Koch en parlant de la « direction de déplacement ». Ce qu'il nous faut, c'est trouver une autre voie vers le concept de dimension, une voie qui ne dépende pas de la direction.

Il est raisonnable d'adopter une approche adaptée à la nature de la courbe de Koch. L'idée clef est celle d'*auto-similitude* : les parties sont semblables au tout (mais à une échelle réduite).

Supposons qu'on prenne une figure à D dimensions et qu'on la divise en N parties entièrement semblables. Alors le *rapport de similitude*, r , entre la figure entière et une partie (c'est-à-dire le facteur par lequel le tout est plus grand que la partie) sera donné par

$$r = \sqrt[D]{N}.$$

(Puisque la figure est D -dimensionnelle et que r doit être évalué « le long d'une dimension », il est nécessaire de prendre la racine D -ième de N .)

Par exemple, supposons que l'on prenne un segment de droite et qu'on le partage en N morceaux égaux (voir figure 12). Alors chaque morceau a pour longueur $1/N$ de la longueur totale, donc le rapport de similitude sera N . C'est bien la valeur obtenue par la formule ci-dessus quand on prend $D = 1$.

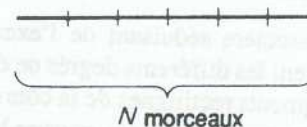


Fig. 12 — Auto-similitude pour un segment de droite

Et si on prenait un rectangle (donc $D = 2$) et qu'on le partage en N morceaux en le découpant horizontalement et verticalement en k segments (voir figure 13) ? Alors le rectangle entier est partagé en exactement $N = k^2$ répliques identiques au

tout mais en format réduit, et le rapport (linéaire) r du tout à n'importe quelle partie est donné par

$$r = D\sqrt{N} = 2\sqrt{N} = 2\sqrt{k^2} = k.$$

De nouveau, ceci est exactement ce que vous attendiez.

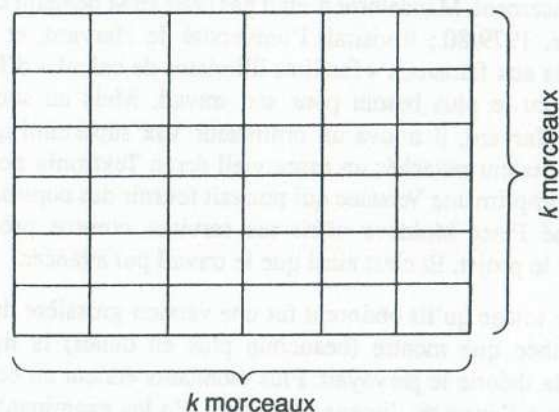


Fig. 13 — Auto-similarité pour un rectangle

Dans les deux cas on semble avoir tourné en rond, mais c'est uniquement parce que nous ne traitons que de cas qui sont très familiers et qui ne posent aucun problème. Lorsqu'on applique la même analyse à la courbe de Koch on arrive à une conclusion beaucoup plus surprenante. Pour cette courbe on ne connaît pas D , mais les valeurs de N et de r sont faciles à déterminer. Tout ce qu'il nous faut c'est examiner la procédure de construction qui nous donne la courbe. On regarde d'abord une section de la côte (voir figure 11 (i)) — n'importe laquelle fait l'affaire puisqu'elles sont toutes pareilles. Dans la construction (voir figure 11 (ii)) le segment simple est remplacé par quatre segments (donc $N = 4$), ayant chacun pour longueur le tiers de celle du segment d'origine (donc $r = 3$). Comme ceci est vrai pour chacun des morceaux de la côte, ce sera vrai pour la courbe de Koch toute entière. Ainsi, suivant la formule générale,

$$3 = D\sqrt{4}$$

Alors qu'est-ce que D ? Certainement pas un nombre entier. La seule façon de déterminer sa valeur est d'utiliser les logarithmes. Si vous prenez les logarithmes des deux membres de l'équation ci-dessus vous obtenez

$$\log 3 = \frac{1}{D} \log 4.$$

Avec une table de logarithmes (ou une machine qui sait évaluer les logarithmes), D peut être calculé ; avec quatre décimales on obtient

$$D = 1,2618.$$

Ainsi la courbe de Koch est une entité mathématique dont la dimension est fractionnaire.

Il n'y a pas que les « courbes » qui puissent avoir des dimensions fractionnaires. On peut également construire des « surfaces » et des « solides » bizarres en utilisant des procédés d'auto-similarité. Par exemple, en commençant par un cube et en enlevant successivement les « milieux » on arrive finalement (c'est-à-dire après une infinité de répétitions) à un objet connu sous le nom d'éponge de Sierpinski (pour lequel $D = 2,7268$) ; la construction est montrée sur la figure 14.

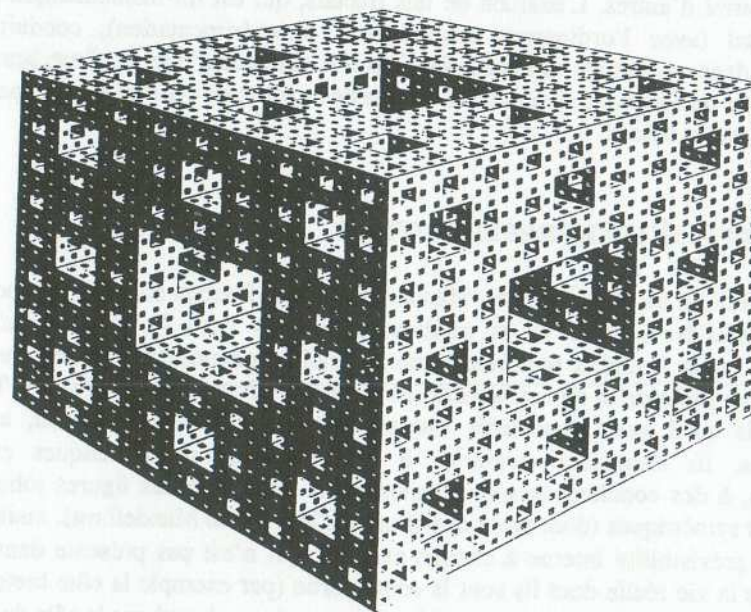


Fig. 14 — L'éponge de Sierpinski prenant forme

Cet incroyable objet a pour volume zéro et est borné par une « surface » infinie. Chacune des faces extérieures de l'éponge est appelée *carpette de Sierpinski* et a une aire nulle entourée d'une frontière infinie.

La dimension de la *carpette de Sierpinski* est égale à $D = 1,2618$, la même que celle de la courbe de Koch. Vous devriez pouvoir confirmer les deux valeurs de D associées à l'éponge en regardant la figure 14 et en utilisant la formule

$$r = D\sqrt{N},$$

ou, en passant aux logarithmes,

$$D = \log N / \log r.$$

Les figures qui ont une dimension fractionnaire ont été appelées *fractals* par Mandelbrot en 1977. La *géométrie fractale* est l'étude de tels objets.

Le reste de ce chapitre traite également de fractals, mais qui ne sont pas de la même sorte que la courbe de Koch et l'éponge de Sierpinski. Ces deux fractals sont hautement réguliers. Le processus de construction est le même à chaque niveau, et le fait de faire un « zoom » sur une partie de la figure pour apercevoir davantage de détails ne produit pas de surprises — c'est une répétition indéfinie. Depuis 1980 on a utilisé des ordinateurs pour examiner des fractals dans lesquels le processus de construction change continuellement (bien que, comme on le verra, il puisse souvent continuer d'être appelé « auto-reproduction »). Avec de telles figures, le zoom peut produire des résultats totalement inattendus, dont la figure 8 n'est qu'un exemple parmi d'autres. L'examen de tels fractals, qui est mi-mathématique mi-expérimental (avec l'ordinateur comme outil d'expérimentation), conduit le chercheur dans un monde nouveau, fascinant et souvent d'une extrême beauté. Comme celle de beaucoup d'autres mondes, la découverte de celui-ci a été en partie gouvernée par le hasard.

Découverte d'un nouveau monde

Vers 1978, le travail de Benoît Mandelbrot sur les fractals était bien au point. L'année précédente avait vu la publication de son livre *Forme, hasard, et dimension*, dans lequel il montrait comment maints phénomènes quotidiens en physique, en biologie et en mathématiques donnent naissance à des fractals. Tous les fractals qu'il avait considérés étaient, comme la courbe de Koch, auto-semblables. Ils donnaient naissance à d'intéressantes mathématiques et, à l'occasion, à des conclusions surprenantes, aussi bien qu'à des figures jolies et hautement symétriques (dont beaucoup illustrent le livre de Mandelbrot), mais il y avait une prévisibilité interne à chaque exemple qui n'est pas présente dans les fractals de la vie réelle dont ils sont la contrepartie (par exemple la côte bretonne fait apparaître un comportement fractal beaucoup moins ordonné que la côte de l'île de Koch). Cet ordre et cette prévisibilité extrêmes sont dus à ce que les fractals considérés étaient auto-semblables du point de vue de l'échelle et de la translation (en langage mathématique ils étaient *invariants par transformation linéaire*). En travaillant avec Mark Laff à IBM en 1978-79, Mandelbrot commença à étudier les fractals qui sont invariants par *transformations non linéaires* (dans lesquels sont permis non pas les seuls changements d'échelle, mais des manipulations telles que les élévations au carré, au cube, etc.). Dans ce cas la seule manière de savoir à quoi ressemble le fractal correspondant est de faire appel à l'ordinateur pour commencer à l'engendrer. En fait, durant la première partie de ce siècle, les travaux de Gaston Julia et de Pierre Fatou sur les mêmes notions s'étaient arrêtés faute de moyens de décrire avec précision les objets qu'ils étaient amenés à considérer (Mandelbrot

était au courant de ces travaux depuis ses études à l'École polytechnique de Paris, où Julia avait été un de ses professeurs).

Vers la fin de 1979, Mandelbrot était arrivé à la conclusion qu'il valait la peine de voir — avec l'aide de l'ordinateur — quel était le comportement de la fonction particulière $x^2 + c$, où la variable x et le paramètre constant c sont tous deux des nombres complexes (on expliquera plus tard de quel « comportement » il s'agit, mais pour l'instant qu'il suffise de dire qu'on peut utiliser des ordinateurs pour dessiner des diagrammes rattachant ce comportement à différentes valeurs du paramètre c).

Assez curieusement, Mandelbrot n'était pas chez IBM pendant ce qui devait être l'année cruciale, 1979/80 ; il visitait l'université de Harvard, et par conséquent n'avait pas accès aux fameuses « facilités illimitées de calcul » d'IBM au moment où il en aurait eu le plus besoin pour son travail. Mais au sous-sol du centre scientifique de Harvard, il trouva un ordinateur Vax supermini qui venait d'être livré, et auquel étaient rattachés un assez vieil écran Tektronix pour visualiser les résultats et une imprimante Versatec qui pouvait fournir des copies. Un assistant de Harvard nommé Peter Moldave offrit ses services comme programmeur (non rémunéré) pour le projet. Et c'est ainsi que le travail put avancer.

La première image qu'ils obtinrent fut une version grossière du double pâté en forme de scarabée que montre (beaucoup plus en détail) la figure 20. Ils s'y attendaient — la théorie le prévoyait. Plus étonnants étaient un certain nombre de pâtés plus petits à l'écart de l'image principale. En les examinant de plus près on constatait que c'étaient des versions plus petites du scarabée principal ! Apparemment le comportement reproductif familier du fractal se manifestait une fois de plus. En faisant des calculs plus précis on obtenait de meilleures images, révélant davantage de détails, jusqu'au moment où les images commencent à paraître de plus en plus embrouillées. C'était peut-être la faute de leur vieil équipement graphique. Pour en avoir le cœur net, Mandelbrot prit le programme pour le faire tourner sur un puissant ordinateur IBM chez lui à Yorktown Heights. Non seulement le désordre ne disparut pas, mais une image de qualité accrue révéla qu'il y avait un nouveau schéma sous-jacent. En revenant jeter un coup d'œil plus approfondi, Mandelbrot et Moldave virent que la poussière de petites pâtés n'était pas formée, comme ils l'avaient cru, de versions réduites du scarabée, mais qu'il s'agissait de beaux schémas compliqués — spirales, familles de figures ressemblant à des hippocampes, etc. (voir figures 8 et 23). Mandelbrot avait entrevu son nouveau monde.

Ordre et chaos

L'ordre et le chaos. A travers l'histoire et à travers l'univers, les deux se disputent la suprématie. Souvent un rien les sépare : un tout petit changement de pression peut transformer le filet d'eau tranquille d'un robinet en un chaos très complexe de tourbillons ; des populations animales harmonieuses (éventuellement

humaines) peuvent se muer avec une facilité effrayante en anarchies incontrôlables. En sens inverse l'ordre peut émerger du chaos, comme en témoigne l'évolution de la vie — et en fin de compte l'humanité — à partir du chaos antérieur de l'univers. Comme nous le verrons, le passage de l'ordre au chaos et l'émergence de l'ordre à partir du chaos apparaissent de façon saisissante avec la simple étude des *boucles de rétroaction (feedbacks)*.

Le trait essentiel du mécanisme de rétroaction consiste en ce qu'il y a une certaine quantité, appelons-la x , qui change soit en fonction du temps, soit en fonction de quelque autre variable, de telle manière que la valeur de x à tout instant dépende d'une façon régulière de sa valeur à l'instant précédent (voir figure 15). Des processus de cette nature sont omniprésents dans les sciences exactes et dans la plupart des sciences « inexactes » sinon dans toutes. Une grande partie des mathématiques modernes a été développée pour manier de tels processus. Par exemple, c'est pour traiter le cas où l'accroissement entre l'ancien x et le nouvel x est infinitésimal qu'on a développé les nombreuses techniques relatives aux équations différentielles.

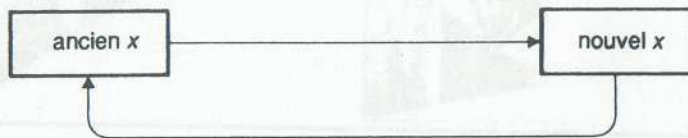


Fig. 15 — Mécanisme de feedback changeant la valeur de x

Pour étudier mathématiquement un processus de rétroaction, la règle qui engendre la nouvelle valeur de x à partir de la valeur précédente est supposée donnée sous forme d'une fonction mathématique $f(x)$. Alors, en commençant par une valeur *semence* x_0 de x , on engendre des valeurs successives $x_1, x_2, x_3, \dots$, suivant la règle illustrée dans la figure 16.

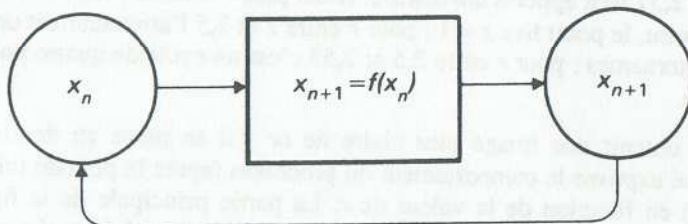


Fig. 16 — Génération des valeurs successives de x par feedback

Il n'y a aucune restriction sur la nature de la fonction $f(x)$, bien que la rétroaction résultante ne soit pas bien intéressante à moins que la fonction $f(x)$ choisie ne soit quelque chose d'autre qu'une fonction *linéaire*, de la forme

$$f(x) = ax + b$$

avec des valeurs constantes de a et b . Nous nous occuperons particulièrement du cas où la fonction $f(x)$ comporte un paramètre. Nous verrons que le choix de ce paramètre peut affecter de façon saisissante le comportement du processus de rétroaction résultant.

On considère habituellement l'opération d'une boucle de rétroaction comme un *système dynamique*, qui a pour effet d'envoyer un point initial x_0 *successivement* en des points $x_1, x_2, x_3, \dots$. La suite des points où x_0 est envoyé peut être appelée la *trajectoire* ou l'*orbite* de x_0 . Si cette trajectoire est ordonnée, nous pouvons parler de *dynamique ordonnée* ; si elle ne l'est pas, on peut la décrire comme *dynamique chaotique*. Ce langage à lui seul indique à quel point cette étude se rattache à de nombreux phénomènes de tous les jours.

A titre d'exemple, considérez la croissance d'une population sur un certain nombre d'années. Supposons que la population initiale soit x_0 , et soit x_n la population au bout de n années. Le taux de croissance pendant la $(n+1)$ -ième année est alors

$$r = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

Si le taux de croissance est constant d'année en année, cette égalité sera valable quel que soit n , et peut être réarrangée de manière à donner la *loi dynamique (linéaire)*

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1+r)x_n.$$

Au bout de n années, la population sera

$$x_n = (1+r)^n x_0$$

(expression obtenue en travaillant à rebours du temps à partir de $x_n = (1+r)x_{n-1}$, $x_{n-1} = (1+r)x_{n-2}$, etc., jusqu'à $x_1 = (1+r)x_0$). Ceci est un exemple de ce qu'on appelle la *croissance exponentielle*, qui caractérise (jusqu'à un certain point) beaucoup de phénomènes de la vie réelle autres que la croissance des populations. Ainsi qu'il devrait être clair d'après ce qui a été vu au chapitre 1, s'il continue pendant un grand nombre d'années sans contrôle, un tel mécanisme de croissance conduira à des populations énormes. Ce qui arrive en pratique, c'est qu'une telle croissance ne se produira que sur une période limitée, après quoi on atteint une limite. En 1845, P. F. Verhulst a formulé une loi de croissance qui tient compte de l'existence d'un maximum possible de la population, disons X . La loi de Verhulst suppose que le taux de croissance diminuera de r à 0 à mesure que la population approchera de X . Une façon simple de représenter cela mathématiquement est de remplacer le taux de croissance constant r par le taux variable

$r - cx_n$ où c est une constante. Puisque la croissance de la population doit s'arrêter quand $x_n = X$, la valeur de la constante c devra être r/X . Avec cette valeur, la loi dynamique pour le processus de Verhulst est donc

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r - cx_n)x_n = (1 + r)x_n - cx_n^2.$$

Une fois la valeur X atteinte, la population restera constante :

$$f(X) = X.$$

Si la population est plus petite, elle croîtra. Si elle est plus grande elle décroîtra. Si vous essayez de faire le calcul (à la main ou à l'ordinateur) vous verrez que le processus de Verhulst donne une évolution de la population qui finalement devient stable pour une population X , indépendamment de l'état initial. C'est du moins ce qui se produit pourvu que r soit plus petit que 2 (un taux de croissance de 200 %) — restriction qui s'applique certainement à la croissance des populations humaines. Mais, comme l'a fait remarquer en 1963 le météorologiste E. N. Lorenz, pour des valeurs plus grandes de r la loi de Verhulst décrit certains aspects des flux turbulents, et il y a d'autres applications en physique des lasers, en hydrodynamique, et dans la théorie des réactions chimiques, de sorte que le comportement du processus de Verhulst pour r supérieur à 2 n'est pas sans intérêt. Et il se trouve que c'est là qu'on tombe sur des résultats réellement fascinants.

Si l'on pose $c = r/X$, la règle ci-dessus devient

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n - (r/X)x_n^2.$$

Grâce à un changement d'unités de mesure approprié on peut supposer que $X = 1$, ce qui rend la règle encore plus simple :

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n - rx_n^2 = x_n + rx_n(1 - x_n).$$

Si vous avez accès à un ordinateur vous pouvez voir aisément comment le processus de Verhulst évolue pour différentes valeurs de r dans cette dernière formulation de l'équation, en commençant dans chaque cas par la valeur semence (disons) $x_0 = 0,1$. (Votre programme doit entrer la valeur choisie de r , poser $x = 0,1$, itérer l'opération

$$x = x + r * x * (1 - x)$$

500 fois pour donner au processus le temps de se stabiliser, et ensuite calculer et imprimer la vingtaine de valeurs suivantes de x .) Pour les valeurs de r plus petites que 2 le processus atteint rapidement la valeur d'équilibre $x = 1$. Pour r juste au-dessus de 2 le processus tend vers une oscillation régulière entre deux valeurs ($r = 2,1$ donne les valeurs 0,82 et 1,13). Ce comportement continue pour tous les choix de r jusqu'à $r = 2,5$, qui donne un cycle répétitif de quatre points (0,54, 1,16, 0,70, 1,23). Ceci continue jusqu'à $r = 2,55$, où commence un cycle de huit valeurs. Pour $r = 2,565$ il se dédouble à nouveau jusqu'à 16 valeurs à travers lesquelles le processus finit par circuler indéfiniment, et ainsi de suite en se dédoublant de plus en plus souvent jusqu'à ce que, pour $r = 2,57$, l'effet de dédoublement se soit produit

infiniment souvent. Au-delà de ce point le comportement du système dynamique devient chaotique et les valeurs sautent de place en place sans aucun schéma apparent.

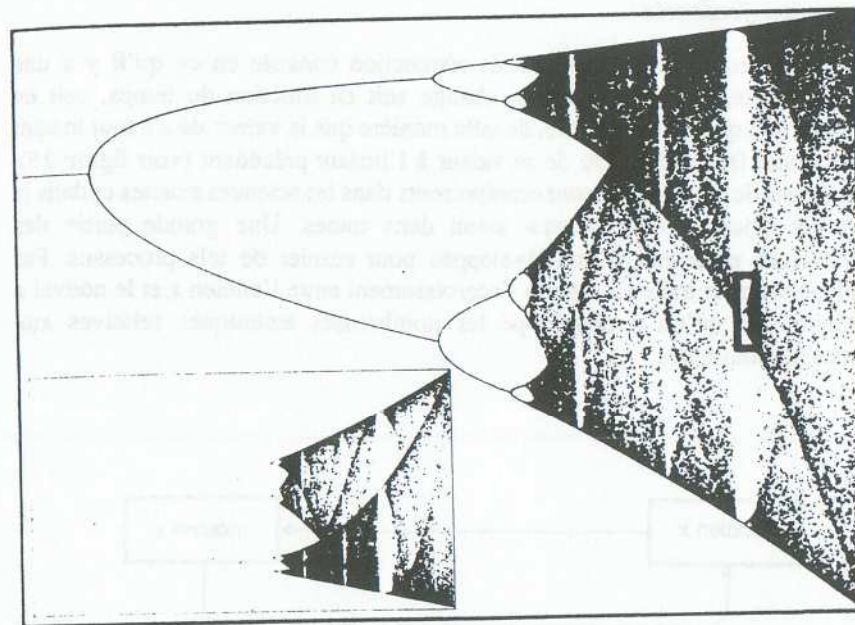


Fig. 17 — Le processus de Verhulst ($1,9 < r < 3,0$),

avec un agrandissement de la zone indiquée, montrant l'auto-répétition. Les valeurs de 1,9 à 3,0 sont représentées par l'axe horizontal. Pour chaque valeur de r , 120 valeurs successives de x sont représentées verticalement après une période initiale de 5 000 itérations pour permettre au processus de se stabiliser. Pour r plus petit que 2 il n'apparaît qu'une valeur de x . Pour r entre 2 et 2,5 il y a deux valeurs, pour r entre 2,5 et 2,55 quatre, ensuite huit valeurs jusqu'à 2,565. Ce doublement continue toujours plus rapidement jusqu'à 2,57, où commence le chaos. Mais à l'intérieur du chaos commence à émerger un nouvel ordre, incluant l'auto-répétition.

Les divers cycles vers lesquels le processus converge pour les valeurs de r inférieures à 2,57 sont appelés *attracteurs*. Ainsi pour r inférieur à 2 l'attracteur se réduit à un point, le point fixe $x = 1$; pour r entre 2 et 2,5 l'attracteur est une paire de valeurs alternantes ; pour r entre 2,5 et 2,55 c'est un cycle de quatre points ; et ainsi de suite.

On peut obtenir une image plus claire de ce qui se passe en dessinant un graphique qui exprime le comportement du processus (après la période initiale de stabilisation) en fonction de la valeur de r . La partie principale de la figure 17 montre ce qui se passe quand on prend des valeurs de r de 0,9 à 3,0 portées sur l'axe horizontal, et que l'on figure 120 valeurs successives de x après une période initiale de stabilisation de 5 000 itérations.

Une analyse soigneuse de la région chaotique au-dessus de $r = 2,57$ révèle que sous ce chaos se cache une quantité considérable d'ordre. Par exemple, près de $r = 3,0$ il n'y a qu'une seule bande chaotique, pour $r = 2,679$ celle-ci se divise en deux bandes chaotiques, pour $r = 2,593$ en quatre, puis en huit, seize, etc. en doublant chaque fois jusqu'à ce que pour $r = 2,57$ ce doublement se soit produit une infinité de fois, le processus tout entier ne faisant que reproduire le comportement du système dynamique lui-même. Il y a en fait une *constante universelle* reliée non seulement aux deux processus de dédoublement rencontrés jusqu'ici, mais aussi à d'autres exemples de ce phénomène. Elle s'appelle le *nombre de Feigenbaum*, et sa valeur avec dix décimales est

4,669 201 660 9.

Bien plus apparent est bien entendu l'aspect des bandes intérieures à la région chaotique, où un certain ordre semble (en bref) régner une fois de plus. Par exemple, aux environs de $r = 2,83$ le chaos fait subitement place à un attracteur circulaire de trois points. Et dans la région autour de son point central, ce que vous découvrirez est une minuscule réplique de tout le diagramme de Verhulst, complet avec ses bandes en ordre au milieu du chaos (un agrandissement de cette région se voit à l'intérieur de la figure 17, « couché » dans la direction horizontale). Comportement fractal une fois de plus ! Mais ceci n'est que le commencement.

Les ensembles de Julia

Le travail de Mandelbrot en 1980, mentionné plus haut, faisait suite à des travaux (principalement de P. J. Myrberg dans les années 1960) sur le processus de Verhulst. La principale nouveauté dans l'approche de Mandelbrot consistait à permettre à la variable et au paramètre constant d'être des nombres complexes et pas seulement des nombres réels. Ainsi au lieu d'un processus envoyant des nombres sur des nombres (sur la droite réelle), on envoie des points sur des points (dans le plan complexe à deux dimensions, ou diagramme d'Argand).

Pour faciliter un peu les choses, au lieu de prendre la fonction

$$f(x) = x + rx(1-x) = -rx^2 + (1+r)x,$$

comme plus haut, Mandelbrot a utilisé la formule un peu plus simple

$$f(x) = x^2 + c,$$

et c'est cette fonction que nous allons considérer ici.

Supposez que vous partiez d'une valeur semence x_0 (un nombre complexe), et que vous regardiez ce qui se passe lorsque vous itérez la fonction f pour engendrer une suite de points $x_0, x_1, x_2, \dots$ suivant la règle

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Les résultats obtenus dans le processus de Verhulst suggèrent que le choix du paramètre constant c aura un effet significatif. Commençons par regarder le cas le plus simple, celui où $c = 0$. La loi dynamique se réduit alors à

$$x_{n+1} = x_n^2.$$

Il y a alors trois possibilités, qui dépendent du choix de x_0 . Premièrement, si x_0 est à une distance de 0 (l'origine) plus petite que 1, alors les nombres de la suite deviennent de plus en plus petits (c'est-à-dire de plus en plus proches de 0), ce qui signifie que 0 est un attracteur du système. Deuxièmement, si x_0 est à une distance de 0 supérieure à 1, alors les nombres de la suite deviennent de plus en plus grands, auquel cas on dit que l'infini est un attracteur. (Bien que l'infini ne soit pas un *point* du plan complexe, cet usage particulier du mot « attracteur » est une pure convention de style.) La possibilité restante est que x_0 soit exactement à la distance 1 de l'origine (c'est-à-dire que x_0 soit sur le cercle de rayon unité centré en 0). Dans ce cas la suite ne quitte jamais ce cercle unité. Ainsi le cercle unité est la *frontière* entre les deux domaines d'attraction, l'un gouverné par 0, l'autre par l'infini.

Pour autant qu'il partage le plan complexe en deux régions d'attraction distinctes séparées par une courbe frontière, cet exemple est typique de tous les cas considérés par Mandelbrot (et d'autres). Mais ce que Mandelbrot a découvert, c'est que pour des valeurs non nulles du paramètre c , non seulement l'attracteur non infini peut consister en plus d'un point, mais aussi que la frontière entre les domaines des deux attracteurs peut être incroyablement complexe et extrêmement belle.

Pour $c = 0,31 + 0,04i$, par exemple, l'attracteur non infini se réduit à un point, mais la frontière entre son domaine et celui gouverné par l'infini n'est pas un cercle parfait, mais plutôt le cercle joliment déformé que montre la figure 18 (i). C'est une déformation fractale : si vous entreprenez de jeter un regard de plus près sur n'importe quelle partie de la frontière (en utilisant un ordinateur comme « microscope »), vous retrouvez l'auto-similarité familière et interminable qui caractérise les courbes fractales.

Bien que ce ne soit qu'avec l'avènement de l'ordinateur que l'on ait pu examiner de telles figures, Julia et Fatou avaient démontré que tout fragment de frontière, si petit fût-il, contenait toute l'information nécessaire pour déterminer la courbe tout entière (en ce que toute la frontière peut être engendrée en soumettant ce fragment de manière répétée à la transformation qui détermine le système, dans ce cas $f(x) = x^2 + c$). En l'honneur de Julia, de tels ensembles frontières sont appelés aujourd'hui *ensembles de Julia*.

La figure 18 (ii) montre un ensemble de Julia associé à un processus dynamique dont l'attracteur non infini consiste en un cycle de trois points. La loi dynamique est ici $f(x) = x^2 + c$, avec $c = -0,12 + 0,74i$. La figure 19 montre d'autres exemples d'ensembles de Julia issus de la loi $f(x) = x^2 + c$, y compris des cas extrêmes où les régions dégénèrent en « poussières » ou « dendrites » (voir plus loin pour les détails).

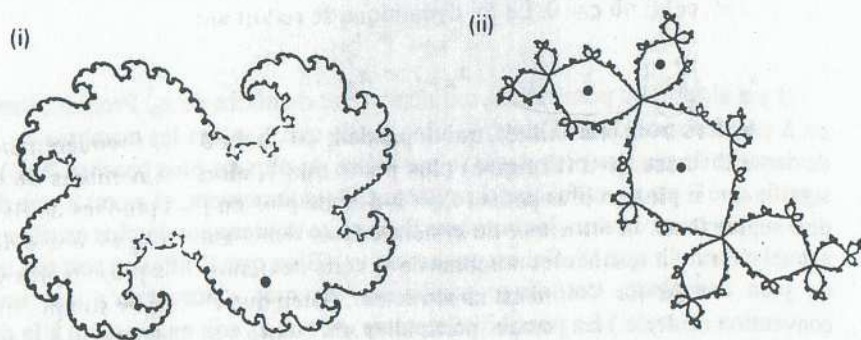


Fig. 18 — Ensembles de Julia avec leurs attracteurs (voir le texte pour les détails)

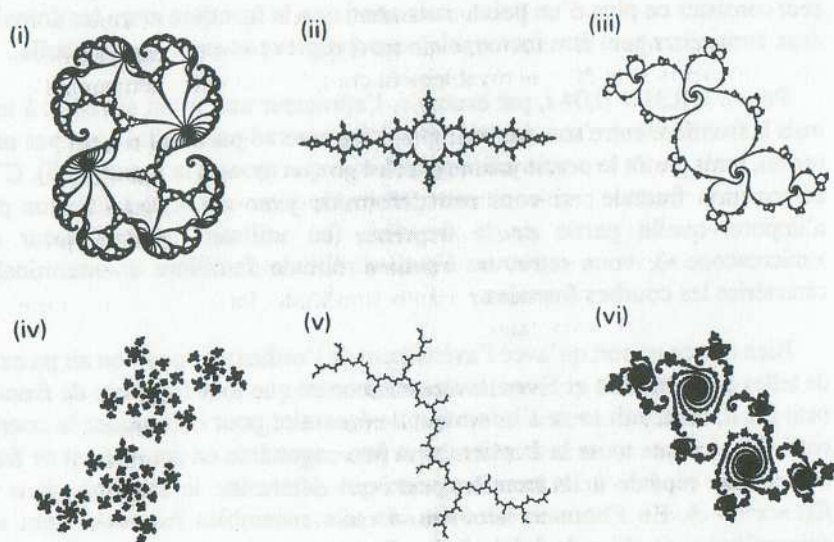


Fig. 19 — Ensembles de Julia à partir de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot (voir le texte pour les détails)

La diversité de structure des ensembles de Julia pour différentes valeurs du paramètre met en lumière à quel point est critique le choix de c . Il est naturel de se

demander si on peut caractériser de quelque manière les valeurs de c pour lesquelles le système dynamique correspondant et ses ensembles de Julia ont une forme particulière donnée. L'étude de cette question a conduit Mandelbrot à la découverte, en 1980, de la région (ou du sous-ensemble) du plan complexe qui porte maintenant son nom : l'ensemble de Mandelbrot.

L'ensemble de Mandelbrot

Le pâté noir en forme de scarabée que montre la figure 20 est connu sous le nom d'ensemble de Mandelbrot. Depuis sa découverte on a montré que cet ensemble est intimement lié au comportement de tous les processus dynamiques, pas seulement de celui considéré ici à titre d'exemple. Comme tel il occupe en mathématiques une place spéciale et fondamentale, tout comme d'autres formes spéciales comme le cercle et les polygones réguliers.

Comme un simple regard sur les figures 18 et 19 doit permettre de le voir, un processus dynamique complexe peut être de deux types : ou bien il partage le plan complexe en une ou plusieurs régions intérieures et une seule région extérieure s'étendant à l'infini (figure 18 (i), (ii), figure 19 (i), (ii), (iii)), ou bien il fait dégénérer l'ensemble de Julia en quelque chose qui ne délimite aucune région intérieure (figure 19 (iv), (v), (vi)). Le comportement exact dépend de la place du paramètre c par rapport à l'ensemble de Mandelbrot. Pour continuer sur l'exemple du processus $f(x) = x^2 + c$, nous considérerons d'abord les cas où il y a un ensemble de Julia non dégénéré. Il y a alors un attracteur autre que l'infini.

Si c est choisi à l'intérieur du corps principal de l'ensemble de Mandelbrot, alors le système dynamique associé possède un attracteur non infini réduit à un point (un point fixe, satisfaisant à $f(x) = x$). L'ensemble de Julia est dans ce cas un cercle fractalement déformé, comme dans la figure 18 (i). (La constante c est ici placée près du bord droit du corps principal en forme de cardioïde de l'ensemble de Mandelbrot.)

Si par contre c est pris à l'intérieur de l'un des bulbes attachés au corps principal de l'ensemble de Mandelbrot, alors l'ensemble de Julia consiste en une infinité de cercles fractalement déformés entourant les points d'un attracteur à cycle périodique et les points qu'il finit par attirer. Dans la figure 18 (ii), par exemple, c est choisi au centre du grand bulbe situé en haut de l'ensemble de Mandelbrot. Les trois points indiqués forment le cycle de 3 de l'attracteur non infini du système. Tout point choisi dans l'une des trois régions contenant cet attracteur sera attiré directement par ce cycle de 3 ; les points pris dans les autres régions seront attirés vers un « attracteur » local qui sera envoyé dans le cycle de 3.

Si c est le point de germination de l'un des bourgeons de l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia présente des vrilles dirigées vers un attracteur marginalement stable, comme dans la figure 19 (i), qui finit par se stabiliser sur un cycle de 20 ($c = 0,273\ 34 + 0,007\ 42\ i$), ou la figure 19 (ii) qui a un cycle de 4 ($c = -1,25$).

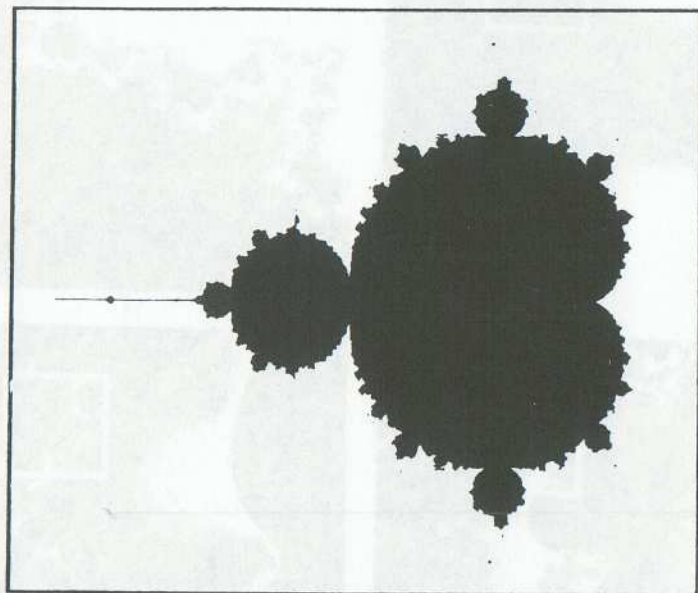


Fig. 20 — L'ensemble de Mandelbrot
($-2,25 < \text{Re } c < 0,75$, $-1,5 < \text{Im } c < 1,5$) (voir le texte pour les détails)

Enfin, si c est n'importe quel autre point frontière de l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia se trouve être ce qu'on appelle un *disque de Siegel*, dont un exemple est montré par la figure 21 ($c = -0,390\,54 - 0,586\,79\,i$). Il y a ici un point fixe entouré par des *cercles invariants*. Ce qui se produit dans ce cas, c'est qu'un point intérieur à la région délimitée par l'ensemble de Julia cheminera graduellement vers le disque contenant le point fixe, après quoi son orbite continuera indéfiniment autour du point fixe sur son cercle invariant.

Les quatre types d'ensembles de Julia décrits ci-dessus sont les seules possibilités pour le processus $f(x) = x^2 + c$. (En 1983, Dennis Sullivan a démontré qu'il y a un type supplémentaire d'ensembles de Julia non dégénérés qui peut se présenter dans d'autres systèmes dynamiques complexes — l'anneau de Herman.)

Voilà tout pour les ensembles de Julia non dégénérés. Mais que peut-on dire des autres, comme ceux des figures 19 (iv), (v), (vi) ? Des images à grande échelle de l'ensemble de Mandelbrot montrent qu'il est entouré de branches d'antennes analogues à des cheveux. Si c est choisi sur une de ces antennes, on obtient un ensemble de Julia de forme similaire. La figure 19 (v) montre l'exemple $c = i$. Il n'y a ici que l'attracteur infini, sur lequel sont envoyés tous les points à l'exception de ceux qui se trouvent sur un cheveu de l'ensemble de Julia.

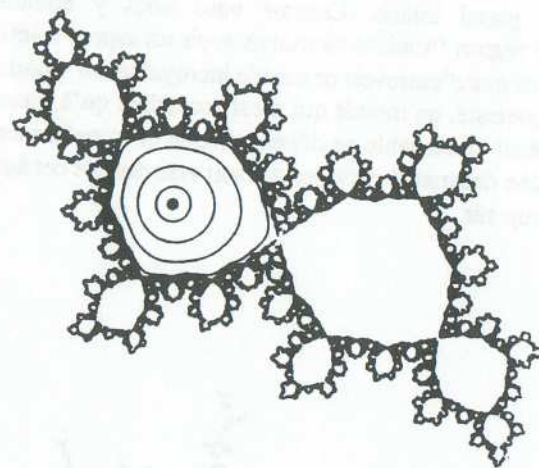


Fig. 21 — Le disque de Siegel
(voir le texte pour les détails)

La figure 20 n'est pas suffisamment détaillée pour montrer les antennes elles-mêmes, mais l'emplacement de certaines d'entre elles peut être repéré par des nodosités isolées situées sur leur chemin. Des nodosités ? Un examen détaillé (par gonflage à l'ordinateur) révélerait que ce ne sont rien d'autre que de minuscules répliques de l'ensemble de Mandelbrot lui-même ! Elles ont même autour d'elles de minuscules antennes, le long desquelles on peut trouver... et ainsi de suite indéfiniment. (Les vides dans la région chaotique du processus de Verhulst (voir figure 17) correspondent aux positions de ces « bourgeons » par rapport à l'axe réel.) Si c est choisi sur l'un de ces bourgeons, l'ensemble de Julia correspondant est une combinaison entre une dendrite et une infinité de copies de l'ensemble de Julia provenant de la valeur correspondante de c dans l'ensemble de Mandelbrot principal (voir figure 22).

La seule possibilité qui reste est de choisir c complètement en dehors de l'ensemble de Mandelbrot (et de ce qui s'y rattache). Ici l'infini est le seul attracteur, et l'ensemble de Julia se dissout en points isolés appelés *poussière de Fatou*. Cette poussière devient de plus en plus fine à mesure que c s'éloigne de l'ensemble de Mandelbrot. Si c est choisi tout près de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot, la poussière est assez épaisse pour créer des images fascinantes, comme dans les figures 19 (iv), (vi). (Pour la figure 19 (vi), c est proche de la valeur qui produit la figure 19 (iii), et il y a une nette ressemblance entre les deux ensembles de Julia.) De telles images de poussière sont toujours fractales (c'est-à-dire auto-semblables), avec une dynamique chaotique.

Il n'est pas étonnant, puisque la frontière de l'ensemble de Mandelbrot joue un rôle aussi critique dans la dynamique des systèmes associés, que cette frontière soit elle-même d'un grand intérêt. Comme vous vous y attendez certainement maintenant, cette région frontière se trouve avoir un aspect fractal compliqué. La figure 23 ne permet que d'entrevoir ce monde incroyable, un monde où chaque point du territoire est contesté, un monde qui n'est accessible qu'à l'aide de l'ordinateur — le degré de détail discernable ne dépendant que de la puissance de l'ordinateur. S'il y a une branche des mathématiques qui soit vraiment de cet âge de l'ordinateur, celle-ci l'est à coup sûr.

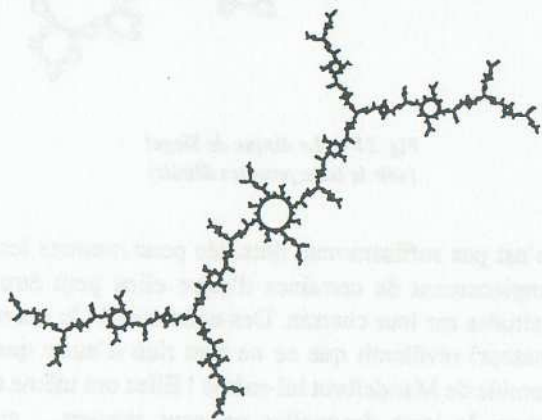


Fig. 22 — Un ensemble de Julia provenant d'un « bourgeon » de Mandelbrot (voir le texte pour les détails)

Autres lectures suggérées

Une bonne appréciation du monde qu'on vient de décrire ne peut être obtenue qu'avec des images en couleurs, où les couleurs peuvent servir à donner une sorte de relief ou de contour reflétant la dynamique du système. Une excellente compilation en couleur et en noir et blanc est fournie par le livre *The Beauty of Fractals*, de H. O. Peitgen et P. H. Richter (Springer-Verlag, 1986). Ce livre est hautement recommandé.

Pour un exposé assez à jour de la géométrie fractale et de ses nombreuses applications, voir *The Fractal geometry of Nature*, de Benoit B. Mandelbrot (W. H. Freeman, 1982).

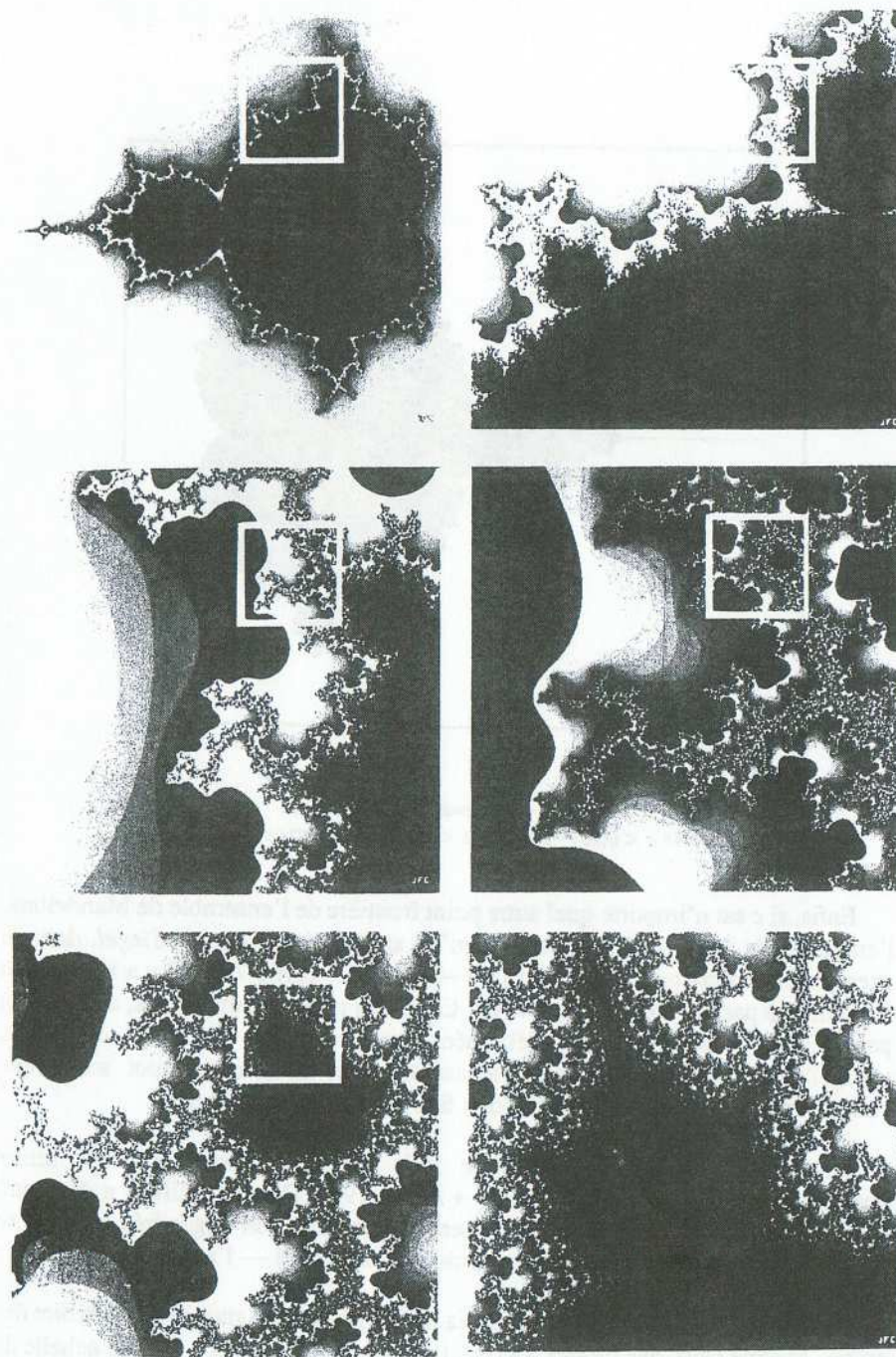


Fig 23 — Un voyage dans la région frontière de l'ensemble de Mandelbrot (illustration réalisée par J.F. Colonna, Lactame, École polytechnique et CNET)