

Cours sur les fonctions convexes avec preuves

Dans tout le chapitre I désigne un intervalle non réduit à un point.

1 Définitions

Définition 1 (Paramétrisation d'un segment) Soit A et B deux points d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On appelle segment $[AB]$ l'ensemble :

$$[AB] = \{A + t(B - A) \mid t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)A + tB \mid t \in [0, 1]\}.$$

En particulier,

- si a et b sont deux réels, avec $a \leq b$, on a

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}.$$

- si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$[AB] = \{((1 - t)x_A + tx_B, (1 - t)y_A + ty_B) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Remarque: Un point M appartient au segment $[AB]$, si et seulement si, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $M = (1 - t)A + tB$. Le point M peut alors s'interpréter comme la moyenne des points A et B pondérés par les coefficients $(1 - t)$ et t (on parle de barycentre). Lorsque $t = 0$, le point M est le point A , lorsque $t = \frac{1}{2}$, M est le milieu de $[AB]$, et si $t = 1$, on obtient le point B . Enfin, si par exemple $t = \frac{1}{3}$, le point M vérifie $M = A + \frac{1}{3}(B - A)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et donc M se situe au premier tiers du segment $[AB]$. Le segment $[AB]$ est donc l'ensemble de toutes les moyennes à coefficients positifs des points A et B .

Définition-Proposition 2 (Inégalité des cordes) Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si tout arc de la courbe de f est en-dessous de la corde, c'est-à-dire si

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b).$$

La fonction f est dite concave si $-f$ est convexe.

Preuve : on considère les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ avec $a \leq b$. Soit $t \in [0, 1]$ et $x_t = ta + (1 - t)b$. On considère le point $M_t(x_t, f(x_t))$ de la courbe et le point N_t de la corde $[AB]$ d'abscisse x_t . Alors l'ordonnée de N_t vaut $y_c = tf(a) + (1 - t)f(b)$.

Dire que l'arc de courbe $\widehat{AB}$ est en dessous de la corde $[AB]$ équivaut à dire que pour $t \in [0, 1]$, le point M_t est en dessous de N_t , ce qui équivaut à dire que pour $t \in [0, 1]$ l'ordonnée $f(x_t)$ de M_t est inférieure ou égale à y_t l'ordonnée de N_t , ce qui équivaut à dire que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$. ■

Exemple:

- La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

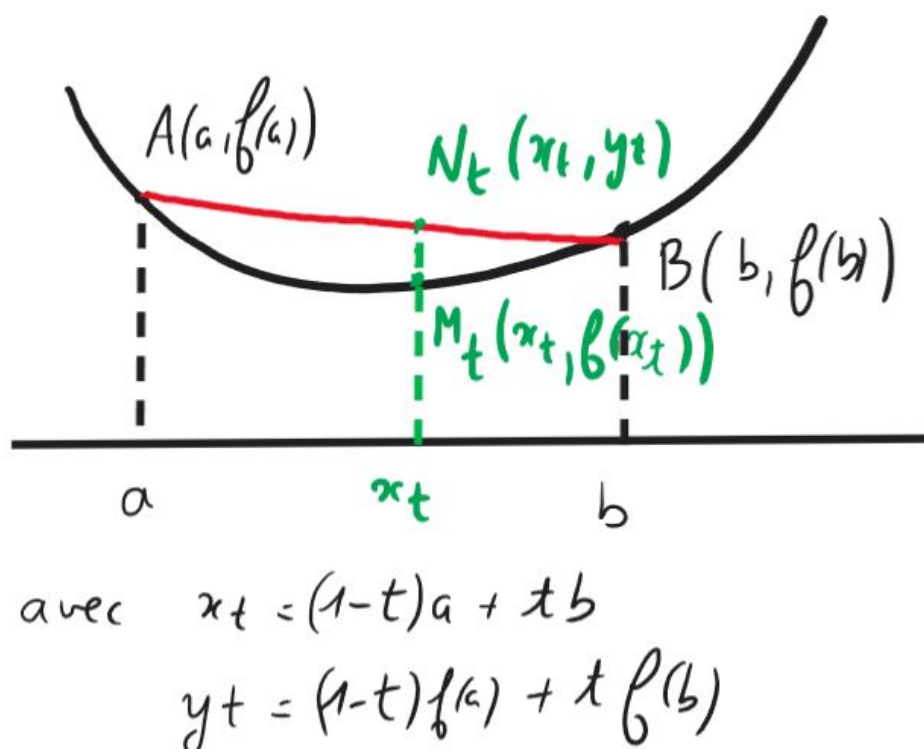


FIGURE 1 – Courbe d'une fonction convexe

- Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.

Exercice 1 En «observant» que $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$, démontrer que pour tout a et b dans $\mathbb{R}$, on a $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

Remarque: Attention, le contraire de convexe, n'est pas concave.

Remarque: La droite (AB) a pour pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, donc pour équation cartésienne $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. En traduisant que $f(x_t) \leq y_t$, on obtient alors un nouvel énoncé pour la définition de fonction convexe.

Proposition 3 (Inégalité des cordes, «version cartésienne») Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$, on a

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Exemple: On «observe» que $\sin$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

2 Régularité d'une fonction convexe

Proposition 4 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Les deux propositions sont équivalentes :

1. La fonction f est convexe

2. Pour tout $a \in I$, la fonction «pente»

$$p_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Preuve :

1. Supposons f convexe. Soit $a \in I$ et $x < y$ dans I . On note A, X, Y les points de la courbe de f d'abscisses respectives a, x, y .

- (a) Cas où $a < x < y$. Comme f est convexe, d'après l'inégalité des cordes (version cartésienne), le point X est en dessous de la corde $[AY]$, donc $f(x) \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}(x-a) + f(a)$, ce qui donne $\frac{f(x)-f(a)}{y-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{x-a}$ car $x-a > 0$, c'est-à-dire $p_a(x) \leq p_a(y)$. Nous avons ainsi prouvé que la pente de la droite (AX) est inférieure à celle de (AY) (on note $p(AX) \leq p(AY)$).
- (b) Cas où $x < y < a$. Comme f est convexe, $f(y) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a) + f(a)$ et donc comme $y-a < 0$, on a $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et donc $p_a(y) \geq p_a(x)$. Nous avons ainsi prouvé que la pente de la droite (YA) est supérieure à celle de (XA) (on note $p(YA) \geq p(XA)$).
- (c) Cas où $x < a < y$. D'après les deux cas précédents, $p(AY) \geq p(XY) \geq p(XA)$, ce qui implique $p_a(y) \geq p_a(x)$.

Dans les trois cas $x < y$ implique que $p_a(x) \leq p_a(y)$, et donc p_a est croissante sur I .

2. Supposons que pour tout $a \in I$, la fonction p_a est croissante. Soit $a < b$ dans I et $x \in]a, b[$. Comme la fonction p_a est croissante, on a $p_a(x) \leq p_a(b)$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et donc comme $b-a > 0$, on a $f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$, donc f est convexe sur I .

■

Remarque: Nous venons en fait de démontrer l'inégalité des trois pentes.

Proposition 5 (Inégalité des trois pentes) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est convexe sur I , si et seulement si, pour tout a, b, c de I tels que $a < b < c$, on a l'inégalité des trois pentes suivante :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Corollaire 6 (Régularité d'une fonction convexe) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors :

- f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur à I
- f est continue en tout point intérieur à I .

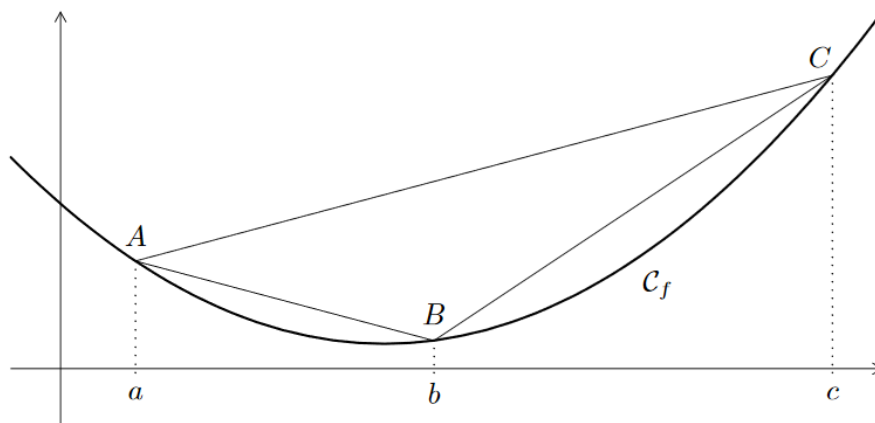


FIGURE 2 – Inégalité des trois pentes

Preuve : Si a est un point intérieur à I , il existe $r > 0$ tel que $[a - r, a + r] \subset I$. Mais alors la fonction pente $p_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $[a - r, a[$ et majorée par $p_a(a + r)$, donc admet une limite finie en a à gauche, d'après le théorème de la limite monotone. De même p_a est croissante sur $]a, a + r]$, minorée par $p_a(a - r)$, donc admet une limite finie en a à droite. Nous venons de montrer que f est dérivable à gauche et à droite en a . Elle est donc aussi continue à gauche et à droite en a , ce qui implique que $\lim_{a-} f = f(a)$ et $\lim_{a+} f = f(a)$ et donc que f est continue en a . ■

Remarque : La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 0. Enfin, si a n'est pas intérieur, la fonction f n'est pas forcément continue en a . Penser à la fonction partie entière sur $[0, 1]$ qui n'est pas continue en 1.

3 Cas des fonctions dérivables

Théorème 7 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors

1. la fonction f est convexe ssi sa dérivée f' est croissante.
2. la fonction f est concave ssi sa dérivée f' est décroissante.

Preuve :

- On suppose f convexe. Soit $a < x < b$ dans I . On veut montrer que $f'(a) \leq f'(b)$. D'après l'inégalité des trois pentes,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Avec l'inégalité de gauche, en faisant tendre x vers a , on obtient $f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ car f est dérivable en a . De même avec l'inégalité de droite et en faisant tendre x vers b , on obtient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$. On a donc en particulier $f'(a) \leq f'(b)$.

- On suppose que f' est croissante. Soit $a < b$ dans I . On pose $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et pour $x \in [a, b]$, $\phi(x) = f(x) - (k(x-a) + f(a))$. La fonction ϕ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et on a $\phi(a) = \phi(b) = 0$, donc d'après Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. Or $\phi' = f' - k$, donc ϕ' est croissante sur I , donc $\phi' \leq 0$ sur $[a, c]$ et $\phi' \geq 0$ sur $[c, b]$. Elle admet donc un minimum en c , et comme elle s'annule en a et b , on est sûr que pour tout $x \in [a, b]$, $\phi(x) \leq 0$, donc $f(x) \leq k(x-a) + f(a)$. On a bien f convexe.



Exercice 2 Démontrer que pour tous réels a et b , on a $(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.

Remarque: Si de plus f est deux fois dérivable, on a donc f convexe ssi f'' est positive.

Proposition 8 (Inégalité des tangentes) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable. Alors la courbe de f est au dessus de toutes ses tangentes.

Exemple: Cette proposition permet d'obtenir des inégalités classiques et surtout de les visualiser :

1. $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
3. $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$

Définition-Proposition 9 (Point d'inflexion) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I . On dit que a est un point d'inflexion si f est concave au voisinage de a à gauche et convexe au voisinage de a à droite (ou l'inverse). Si f est deux-fois dérivable, a est un point d'inflexion ssi f'' s'annule en a et change de signe en a .

Exercice 3 On pose $f(x) = \frac{\ln(1-2x)}{1+x}$. Calculer le DL_3 en 0 de f , en déduire que 0 est un point d'inflexion.

Proposition 10 (Inégalité de Jensen) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Soit $a_1, \dots, a_n$ des éléments de I et $t_1, \dots, t_n$ des réels positifs tels que $t_1 + \dots + t_n = 1$. Alors

$$f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n).$$

Remarque: Le réel $t_1 a_1 + \dots + t_n a_n$ est la moyenne des réels $a_1, \dots, a_n$ pondérés par les coefficients $t_1, \dots, t_n$

Preuve : Par récurrence sur n . C'est vrai pour $n = 1$, et pour $n = 2$

Supposons que c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \dots, a_{n+1}$ des éléments de I et $t_1, \dots, t_{n+1}$ des réels positifs tels que $t_1 + \dots + t_{n+1} = 1$. L'idée est qu'on peut calculer des moyennes par paquets (associativité de la moyenne). Par exemple, pour calculer la moyenne d'une classe où il y a p garçons et q filles, on peut calculer la moyenne des garçons m_g et des filles m_f puis faire la moyenne pondérée de ces deux moyennes $\frac{pm_g + qm_f}{p+q}$.

On va ainsi calculer la moyenne $t_1 a_1 + \dots + t_n a_n + t_{n+1} a_{n+1}$ en utilisant deux paquets :

- les nombres $a_1, \dots, a_n$, dont la moyenne pondérée est $\frac{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n}{t_1 + \dots + t_n}$ avec un poids total de $t_1 + \dots + t_n$

- le nombre a_{n+1} avec le poids t_{n+1}

On a donc :

$$\begin{aligned}
 & f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n + t_{n+1} a_{n+1}) \\
 = & f\left((t_1 + \dots + t_n) \left(\frac{t_1}{t_1 + \dots + t_n} a_1 + \dots + \frac{t_n}{t_1 + \dots + t_n} a_n\right) + t_{n+1} a_{n+1}\right) \\
 \leq & (t_1 + \dots + t_n) f\left(\frac{t_1}{t_1 + \dots + t_n} a_1 + \dots + \frac{t_n}{t_1 + \dots + t_n} a_n\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) \text{ car } f \text{ est convexe} \\
 \leq & (t_1 + \dots + t_n) \left(\frac{t_1}{t_1 + \dots + t_n} f(a_1) + \dots + \frac{t_n}{t_1 + \dots + t_n} f(a_n)\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) \text{ d'après } HR(n) \\
 = & t_1 a_1 + \dots + t_{n+1} a_{n+1}
 \end{aligned}$$

■

Exercice 4 (Inégalité arithmético-géométrique) Soit $a_1, \dots, a_n$ dans $]0, +\infty[$. Démontrer que $(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.