POLYNÔMES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - L'anneau des polynômes

I.1 - Polynômes et opérations

Définition 1 *Un polynôme est une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Le nombre a_k est appelé coefficient de degré k de P. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Principe d'identification : deux polynômes sont égaux ssi ils ont les mêmes coefficients.

Définition-Proposition 2 (Combinaison linéaire et produit de polynômes) *: soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.*

- *on note $P+Q$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P+Q = (a_k+b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note λP le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\lambda P = (\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*
- *On note PQ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $PQ = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

On dit que $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition et du produit est un anneau commutatif.

Notations : si $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{K}[X]$, on pose $X = (0,1,0,0,\ldots)$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{(k+1)\text{termes}},0,\ldots)$, et donc $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ que l'on écrit aussi $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$.

Exercice 1 Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ en calculant de deux façons différentes le terme de degré n de $(X+1)^n(X+1)^n$.

I.2 - Degré

Définition-Proposition 3 (Degré et coefficient dominant) *Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ non nul, on appelle degré de P l'entier $\deg P = \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. Si $P = 0$, on pose $\deg 0 = -\infty$.*

Dire que $\deg P = n$ revient à dire que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Le nombre a_n est appelé coefficient dominant. Lorsqu'il est égal à 1, on dit que P est unitaire.

Proposition 4 (Degré d'un produit et d'une somme) *On a*

1. $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda P) = \deg P$.
2. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ *avec égalité si, et seulement si* $\deg P \neq \deg Q$

Corollaire 5 (Intégrité) *Si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$. On dit que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.*

Remarque : l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas intègre car $3 \times 2 = 0 \mod 6$. L'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non plus, prendre...

Définition-Proposition 6 (Composée de polynômes)

- *Soit P et Q deux polynômes avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On pose $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme*

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k.$$

- *Si Q n'est pas constant, on a $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$.*

Exemple : On a par exemple $\deg P(X^5) = 5 \deg P$ (comprendre aussi pourquoi si $P = 1$ et $Q = X$, on a $P(X+1) = 1$ et $Q(X+1) = X+1$).

Exercice 2 Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^3) = X^2 P(X)$.

I.3 - Évaluation d'un polynôme

Proposition 7 (Fonction polynomiale) *Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ l'élément $\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$ de $\mathbb{K}$. La fonction $\widetilde{P} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui à x associe $P(x)$ est appelée fonction polynomiale associée au polynôme P. On a pour tout P et Q dans $\mathbb{K}[X]$,*

$$\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q} \quad \textit{et} \quad \widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}.$$

L'algorithme d'Horner permet d'évaluer un polynôme P en une valeur α de manière efficace [1]
.

I.4 - Notion de fraction rationnelle

On appelle fraction rationnelle un élément F du type $\dfrac{P}{Q}$ avec P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et Q non nul. On appelle degré de F le nombre de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ défini par $\deg F = \deg P - \deg Q$. L'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$ noté est noté $\mathbb{K}(X)$. On dit que l'ensemble $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

1. Si P de degré n, pour évaluer $P(\alpha)$, avec un algorithme naïf, il faut faire $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ multiplications et n additions. C'est une **complexité quadratique**. Avec l'Algorithme de HORNER, seulement n multiplications et n additions, donc une **complexité linéaire**.

II - La division euclidienne de $\mathbb{K}[X]$

Définition 8 *Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B s'il existe un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $B = AP$.*

Proposition 9 *Soit A et B dans $\mathbb{K}[X]$.*

- *Si A divise B non nul, alors $\deg A \leqslant \deg B$.*
- *Si $D \in \mathbb{K}[X]$ divise A et B, alors D divise $D \mid AU + BV$ avec U et V dans $\mathbb{K}[X]$.*

Comme sur $\mathbb{Z}$, il y a une division euclidienne sur $\mathbb{K}[X]$. C'est essentiellement grâce à cet outil fondamental que les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ se ressemblent beaucoup d'un point de vue arithmétique.

Théorème 10 (Division euclidienne) *Soit A et B dans $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que*

$$A = BQ + R \quad \textit{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Ce théorème assure l'existence mais fournit surtout un algorithme permettant d'effectuer cette division.

Exercice 3 Déterminer le reste de $X^{2022} + 5X^{101} - 3$ dans la division euclidienne par $X^2 - 1$.

Définition-Proposition 11 (Polynômes associés) *Soit A et B dans $\mathbb{K}[X]$. On a*

$$(A \mid B \quad \textit{et} \quad B \mid A) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ A = \lambda B).$$

On dit alors que A et B sont des polynômes associés.

III - Racines et factorisation

III.1 - Lien entre racines et factorisation

Proposition 12 (a racine ssi factorisation par $X - a$) *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors*

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de P, c'est-à-dire $P(a) = 0$ ssi $X - a$ divise P.

Exercice 4 Factoriser $P = 2X^3 + X^2 + X - 1$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Proposition 13 (Multiplicité d'une racine) *On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P d'ordre (ou de multiplicité) $r \in \mathbb{N}^*$ lorsque l'une des deux propriétés suivantes équivalentes est vérifiée :*

(i) $(X - a)^r$ *divise* P *et* $(X - a)^{r+1}$ *ne divise pas* P

(ii) *il existe* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P = (X - a)^r Q$ *avec* $Q(a) \neq 0$

Si a n'est pas racine de P, on dit que la multiplicité de a vaut 0.

Exercice 5 Donner les racines et leur multiplicité de $P = (X-1)^4 X^2 (X+1)(X^2-3X+2)$.

Théorème 14 (Nombre maximal de racines comptées avec multiplicité) *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant $a_1, \dots, a_p$ pour racines de multiplicité $r_1, \dots, r_p$. Alors :*

- $$(X-a_1)^{r_1} \cdots (X-a_p)^{r_p} \quad \textit{divise} \quad P.$$
- *La somme des multiplicités des racines est inférieure ou égale au degré du polynôme.*

Exercice 6 Démontrer que $X^2 - 3X + 2$ divise $(X-2)^{2018} + (X-1)^{2017} - 1$.

Corollaire 15 *Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n+1$ racines est nul. En particulier, un polynôme qui admet une infinité de racines est nul.*

Exercice 7 (Sinus, fonction polynomiale ?) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sin x$? Et pour $x \in [0,1]$?

Exercice 8 (Très Joli) Déterminer les polynômes P de degré 4 tels que $P(0) = P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9$ et $P(4) = 16$.

Corollaire 16 (Identification polynôme et fonction polynomiale) *Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = Q(x)$. Alors $P = Q$.*

Remarque culturelle : c'est faux par exemple si $\mathbb{K}$ est le corps fini $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$, puisque $P = (X-\overline{0})(X-\overline{1})(X-\overline{2})$ s'annule sur $\mathbb{K}$, mais n'est pas nul car de degré 3

IV - Dérivation

IV.1 - Généralités

Définition 17 *Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ dans $\mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme dérivé de P par :*

$$P' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} X^n.$$

avec la convnetion que pour $n = 0$, $0X^{-1} = 0$.

Par récurrence on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de P par $P^{(0)} = P$ et $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$.

Cette définition de dérivation coïncide avec la dérivation des fonctions polynomiales réelles.

Proposition 18 (Degré d'une dérivée) *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est non constant, alors $\deg P' = \deg P - 1$.*

Exercice 9 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P' + XP = X^2 + 1$.

Proposition 19 (Opérations sur les polynômes dérivés) *Soit P et Q dans $\mathbb{K}[X]$.*

(i) La dérivation est linéaire.

(ii) Dérivée d'un produit : $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

(iii) Formule de Leibniz : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

(iv) Dérivée d'une composée : $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$.

IV.2 - Lien entre les dérivées successives et les coefficients

Proposition 20 (Formule de Taylor) *Soit* P *dans* $\mathbb{K}[X]$, *on a pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$ *:*

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k.$$

En particulier, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, *on a* $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

IV.3 - Lien entre les dérivées successives et l'ordre de multiplicité d'une racine

Proposition 21 *Si* α *est racine de* P *d'ordre* $r \geqslant 1$ *alors* α *est racine de* P' *d'ordre* $r-1$.

La réciproque est fausse, CEX $P = X^3 + 1$ et $P' = 3X^2$

Exercice 10 Déterminer le reste de $X^{2022} + 5X^{101} - 3$ dans la division euclidienne par $(X-1)^2$.

Proposition 22 (Caractérisation de la multiplicité) *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$. *Les deux propositions sont équivalentes :*

(i) α *est racine de* P *d'ordre* r

(ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ *et* $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 11 Factoriser le polynôme $P = 10X^4 - 35X^3 + 45X^2 - 25X + 5$.

Exercice 12 $P = X^7 + 7X^6 + pX + q$ admet une racine triple ssi $(p,q) = (0,0)$ ou $(p,q) = (-7 \times 5^5, 5^7)$.

V - Notion de polynôme scindé

V.1 - Généralités

Définition 23 *Un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *est dit scindé sur* $\mathbb{K}$ *s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré* 1 *de* $\mathbb{K}[X]$.

Exemple : les polynômes $P = X^2 + 1$ et $Q = X^3 - 1$ ne sont pas scindés sur $\mathbb{R}$ mais le sont sur $\mathbb{C}$ car égaux à $P = (X-i)(X+i)$ et $Q = (X-1)(X-j)(X-\overline{j})$.

Proposition 24 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant $a_1, \dots, a_p$ pour racines de multiplicité $r_1, \dots, r_p$. Si la somme des multiplicité est égale au degré (c'est-à-dire $r_1 + \dots + r_p = n$), alors P est scindé sur $\mathbb{K}$, et il se factorise en :*

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{r_i} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ le coefficient dominant.}$$

Exemples : le polynôme $X^n - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$, car $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}})$.

Exercice 13 (Polynômes de Tchebychev) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (que l'on notera par la suite T_n) tel que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = P(\cos\theta).$$
2. Déterminer le degré de T_n, puis démontrer que T_n est scindé.

V.2 - Factorisation dans $\mathbb{C}$

Le théorème suivant admis est parfois appelé théorème fondamental de l'algèbre :

Théorème 25 (D'Alembert-Gauss) *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Corollaire 26 *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé.*

V.3 - Factorisation dans $\mathbb{R}$

Proposition 27 (Deux outils)

1. *Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ de multiplicité r, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P de multiplicité r.*
2. *si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $(X - \lambda)(X - \overline{\lambda}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2$.*

Exercice 14 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7, qui admettent $1 + i$ comme racine triple et vérifie $P(0) = 1$

Exercice 15 Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

V.4 - Notion de polynôme irréductible

Définition 28 *Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si $\deg P \geqslant 1$ et si ses seuls diviseurs sont les scalaires non nuls et ses polynômes associés : λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Un polynôme non constant réductible est donc de la forme $P = A \times B$ avec $\deg A \geqslant 1$ et $\deg B \geqslant 1$.*

Les polynômes irréductibles sont aux polynômes ce que sont les nombres premiers pour les entiers.

Exemples :

- tout polynôme de degré 1 est irréductible.
- Attention la notion d'irréductibilité dépend du corps de base : X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ car $X^2+1=(X-i)(X+i)$.

Proposition 29 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

Proposition 30 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :*

- *les polynômes de degré 1*
- *les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

Proposition 31 *Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes à coefficients réels de degré 1* ***ou*** *de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

Nous avons donc démontré que :

Théorème 32 *Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ peut se décomposer comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.*

V.5 - Relations coefficients racines pour les polynômes scindés

On a en développant $(X-x_1)(X-x_2)=X^2-(\underbrace{x_1+x_2}_{S})X+\underbrace{x_1x_2}_{P}$ avec S et P la somme et le produit des racines. On généralise :

Proposition 33 *Soit $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ un polynôme scindé de degré $n\geqslant 1$. On a*

$$\begin{aligned} P &= a_n(X-x_1)\times\cdots\times(X-x_n)\\ &= a_n\left(X^n-(x_1+\cdots+x_n)X^{n-1}+\underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)}_{\text{somme de tous les produits de deux racines}}X^{n-2}+\cdots+(-1)^nx_1\dots x_n\right)\end{aligned}$$

D'où

$$P=a_n\left(X^n-\sigma_1X^{n-1}+\sigma_2X^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n\right)$$

où $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1,\dots,x_n$. Elles sont définies par

$$\sigma_k=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}.$$

L'expression σ_k est la somme de tous les produits de k racines de P parmi les n (il y a en particulier $\binom{n}{k}$ produits de ce type). Par identification, on obtient $\sigma_k=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$.

En particulier, on a $\sigma_1=x_1+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\sigma_n=x_1\dots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$.

Exercice 16 Soit z_1,z_2,z_3 les racines complexes de $P=2X^3+5X^2+7$. Démontrer que $(z_1+z_2)^2+(z_1+z_3)^2+(z_2+z_3)^2=2\sigma_1^2-2\sigma_2=\frac{25}{2}$.

Exercice 17 Soit $P=(2X+1)^n+1$. Démontrer que $\sigma_1=\frac{-n}{2},\sigma_2=\frac{\binom{n}{2}}{2^2}$ et $\sigma_n=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$.

VI - Polynômes interpolateurs de Lagrange

Morale : étant donné $n+1$ points, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n dont la courbe passe par ces $n+1$ points.

Théorème 34 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ des réels et $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout entier i de $[\![0, n]\!]$, on définit le polynôme l_i par :*

$$l_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Alors on a :

1. *Pour tout i et j dans $[\![0, n]\!]$, $l_i(x_j)$ vaut 1 si $i = j$ et vaut 0 sinon.*
2. *Le polynôme $L = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant $L(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.*