Résumé de cours sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

Les vecteurs du plan, les nombres réels, les polynômes à coefficients réels, les matrices de même format, ont un point commun. Nous savons les **additionner** (et les soustraire) et leur somme est encore un élément du même type : la somme de deux vecteurs (resp. réels, resp. polynômes) est encore un vecteur (resp. un réel, resp. un polynôme). On sait aussi les **multiplier par un nombre réel**, le résultat donne encore un vecteur (resp. un réel, resp. un polynôme). De tels ensembles sont dits stables par combinaison linéaire. Ce sont des exemples d'**espaces vectoriels**. Ils contiennent toujours un élément particulier, l'élément neutre pour l'addition, que l'on appellera **le vecteur nul**.

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Notion d'espace vectoriel

I.1 Présentation et espaces vectoriels de référence

Définition 1 ($\mathbb{K}$-espace vectoriel) *On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en abrégé «ev»), un ensemble E muni de deux lois :*

- *une loi de composition interne appelée «addition» notée $+$ telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif*
- *une loi de composition externe appelée «multiplication par un scalaire», c'est-à-dire une application $\phi : E\times\mathbb{K}\to E$ où l'on note $\phi(x,\lambda)=\lambda.x$*

qui vérifie les 4 propriétés suivantes : $\forall x,x'\in E, \forall\lambda,\lambda'\in\mathbb{K}$,

1. $\lambda.(\lambda.x)=\lambda\lambda'.x$ *2.* $(\lambda+\lambda').x=\lambda.x+\lambda'.x$
3. $\lambda.(x+x')=\lambda.x+\lambda.x'$ *4.* $1_{\mathbb{K}}.x=x$.

*Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**. L'élément neutre de E noté 0_E est appelé le vecteur nul.*

Proposition 2 (Règles de calcul dans un ev) *Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On a :*

1. $0_{\mathbb{K}}.x=0_E$ *2.* $\lambda.0_E=0_E$
3. $(-\lambda).x=-\lambda.x=\lambda.(-x)$ *4.* $\lambda.x=0_E\implies(\lambda=0_{\mathbb{K}}$ *ou* $x=0_E)$

Proposition 3 (Espaces vectoriels de référence) *Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, que l'on qualifiera d'ev de «référence».*

- *L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, le vecteur nul est $(0,0,\dots,0)$. Les règles de calcul sont données par :*

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\quad\text{et}\quad\lambda(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n).$$

- *l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est le polynôme nul.*
- *l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de format $n \times p$. Le vecteur nul est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
- *l'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^X$ des fonctions de X dans $\mathbb{K}$ (où X désigne un ensemble quelconque), le vecteur nul est la fonction nulle. Les règles de calcul sont données par :*
$$\forall x \in X,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$
Plus généralement si F est un $\mathbb{K}$-ev, alors $\mathcal{F}(X, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
- *l'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ (c'est $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$). Le vecteur nul est la suite nulle.*

Remarquons

Remarque: L'ensemble $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev mais aussi un $\mathbb{R}$-ev.

Nous rencontrerons d'autres ev mais tous seront contenus dans les ev de référence, on parlera de sous-espace vectoriel (sev).

I.2 Notion de sous-espace vectoriel

On retiendra **absolument le critère de sev** :

Définition-Proposition 4 *Un ensemble F est un **sev** d'un ev E si :*

- *F est une partie de E*
- *F contient le vecteur nul 0_E*
- *F est stable combinaison linéaire :*
$$\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F.$$

Un sev de E est bien un ev.

Exercice 1 Préciser si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

1. $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y = 2x\}$
2. $\Delta' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y = 2x+1\}$
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x + 2y - 5z = 0\}$.
4. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x + z \geqslant 0$
5. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \quad \deg P = n\}$
6. $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \quad \deg P \leqslant n\}$

Exercice 2 Que dire d'un sev de $\mathbb{R}^2$ qui contient les vecteurs $(1,0)$ et $(1,2)$?

I.3 Opérations sur les espaces vectoriels

Proposition 5 *L'intersection de sev de E est un sev de E.*

Remarque: La réunion de deux sev n'est pas forcément un sev. Les droites $F = (O_x)$ et $G = (O_y)$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$, mais leur réunion n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$, puisque si $i = (0, 1)$ et $j = (0, 1)$, on a i et j dans $F \cup G$, mais $i + j \notin F \cup G$.

Application : les solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues et p équations est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Définition-Proposition 6 (Produit de $\mathbb{K}$-ev) *Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $E_1 \times E_2$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de la façon suivante : pour tous couples (x_1, x_2) et (y_1, y_2) de $E_1 \times E_2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \textit{et} \quad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

L'ev $\mathbb{R}^5$ peut alors se voir comme le produit d'ev $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$.

On définira aussi à la fin de ce chapitre la somme de sev.

II Familles génératrices, familles libres, bases

II.1 Familles génératrices

Définition 7 (Combinaison linéaire et Vect)

- *un vecteur x est **combinaison linéaire** (CL) des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que*

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

- *Plus généralement, si A est une partie de E ou une famille de vecteurs de E (éventuellement infinie), on dit que x est CL d'éléments de A, si x est CL d'un nombre fini de vecteurs de A. On note $Vect(A)$ l'ensemble des CL de vecteurs de A.*

Définition 8 (Famille génératrice) *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que c'est une famille génératrice de E, ou qu'elle engendre E si tout vecteur de E s'écrit comme CL de vecteurs de cette famille, c'est-à-dire $E = Vect(x_i)_{i\in I}$. De même si A est une partie de E et que $E = Vect(A)$, on dit que A est une partie génératrice de E.*

Exercice 3 Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y = 2x\}$ 2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x - y + 5z = 0\}$

Exercice 4 Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $\mathbb{K}_2[X]$. 2. $S_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \quad M^\top = M\}$

Proposition 9 *Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice.*

Exercice 5 Soit u et v deux vecteurs de E. Démontrer que $\mathrm{Vect}\,(u, v, 2u-3v) = \mathrm{Vect}\,(u, v)$.

Exercice 6 Soit J la matrice Attila de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathbb{K}[J] = \mathrm{Vect}\,(I_n, J)$.

Proposition 10 *Vect(A) est un sev de E, de plus c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sev de E contenant A (on dit aussi que c'est le sev engendré par A).*

Cela donne un nouveau moyen de prouver qu'un ensemble est un ev : si cet ensemble est un vect, alors c'est un ev !

Exercice 7 Justifier que $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$ est un $\mathbb{R}$-ev en l'écrivant comme un vect.

II.2 Familles libres et familles liées

Dans le plan ou dans l'espace, deux vecteurs sont dits colinéaires, s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. Dans l'espace, trois vecteurs sont dits coplanaires si l'un des vecteurs est CL des autres. On généralise cette notion :

Définition 11 (Famille libre ou liée) *Une famille (finie) de vecteurs est dite liée si un des vecteurs de la famille est CL des autres vecteurs de la famille. Sinon, elle est dite libre.*

Une famille infinie est dite libre si toute sous-famille finie est libre. Sinon, elle est dite liée.

Exercice 8

1. On pose $u = (1, 2), v = (3, 2)$ et $w = (-1, 3)$. Les familles (u, v) puis (u, v, w) sont-elles libres ?
2. On pose $u = (1, 3, 5); v = (-1, 0, 4)$ et $w = (-1, 3, 13)$. La famille (u, v, w) est-elle libre ?

Tester la liberté de la famille $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ est plus long. On utilise alors plutôt le critère suivant «une famille est libre si elle ne vérifie pas de relations de dépendance linéaire» :

Proposition 12 *Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est* ***libre*** *ssi :*

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)\,.$$

Exercice 9 Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ 2. $((1, 3, 5), (-1, 0, 4), (-1, 3, 0))$ 3. $((1, 2, -3), (-1, 4, -21), (1, 0, 5))$

Remarque: Une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées ne sont pas proportionnelles est libre. Mais attention, une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées ne sont pas proportionnelles n'est pas forcément une famille libre. CEX : $(u, v, u+v)$ avec u et v non colinéaires.

Exercice 10 (Espace de fonctions) On pose $f_1 = \sin$, $f_2 = \cos$, $f_3 : x \mapsto x\cos x$, $f_4 : x \mapsto x\sin x$, $f_5 : x \mapsto \cos(x+1)$

1. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
2. La famille (f_1, f_2, f_5) est-elle libre ?

Proposition 13

- *une famille constituée d'un seul vecteur est libre, si et seulement si ce vecteur est non nul.*
- *Toute sous-famille d'une famille libre est libre et toute sur-famille d'une famille liée est liée.*

Proposition 14 *Une famille de polynômes non nuls de degré 2 à 2 distincts est libre. En particulier la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.*

II.3 Bases et coordonnées

Grâce aux bases nous aurons le concept de coordonnées et nous pourrons ainsi «numériser» nos objets géométriques.

Définition 15 (Base) *Une famille libre et génératrice de E est appelée une **base** de E.*

Proposition 16 (Bases canoniques) *Il faut connaître les bases canoniques (naturelles) suivantes :*

- *La base canonique de $\mathbb{K}^n$: c'est la famille $(e_1, \dots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$.*
- *La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.*
- *La base canonique de $\mathbb{K}[X]$ est la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
- *La famille $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}, E_{21}, \dots)$ formée par les matrices élémentaires rangées par ordre lexicographique est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Exercice 11 Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ 2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 5z = 0\}$
3. $\{(2x + y, x + y, x + z) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 4. $\{(2x + y, 3x - 5y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Exercice 12 Déterminer une base de l'ensemble des solutions de :

1. $y' = \frac{x}{x+1} y$ 2. $y'' - 4y' + 4y = 0$

Proposition 17 (Notion de coordonnées) $(\star)$ *$(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une CL des vecteurs $e_1, \dots, e_n$. Dans ce cas si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ représente les **coordonnées** du vecteur x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.*

Morale : avec le choix d'une base, un vecteur est déterminé par ses coordonnées, on l'a «numérisé». Nous numériserons aussi les applications linéaires par des matrices.

Exercice 13 Les deux exemples sont indépendants

1. On note $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (-1, 2)$. Donner les coordonnées du vecteur $u = 3i + 2j$ dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}'$.
2. On considère $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (X^2, 2, -X)$ deux bases de $K_2[X]$. Donner les coordonnées de $P = 6X^2 + 3X + 5$ dans $\mathcal{B}$, puis dans $\mathcal{B}'$.

III Applications linéaires

III.1 Vocabulaire

Définition 18 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Une application f de E dans F est dite **linéaire** si elle transforme une CL de vecteurs de E en CL de vecteurs de F :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

- *Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme***
- *Si f est bijective, on dit que c'est un **isomorphisme**. Un endomorphisme bijectif est appelé un **automorphisme**.*
- *Si $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme linéaire** sur E.*

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des AL de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarque: si f est une application linéaire de E dans F, c'est en particulier un morphisme de groupe et on a $f(0_E) = 0_F$ (cela généralise le fait qu'une fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'annule toujours en 0).

Exemple:

- l'endomorphisme dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ est linéaire.
- la fonction carré n'est pas linéaire, $(\star)$ les endomorphismes de $\mathbb{R}$ sont les fonctions linéaires $x \mapsto kx, \quad k \in \mathbb{R}$.
- l'application qui à une fonction f continue sur $[a, b]$ associe $\int_a^b f$ est une forme linéaire.
- la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- la transposition est une application linéaire entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $X \mapsto AX$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 19 $(\star)$ *Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ sont les applications de la forme $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$, ce qui s'écrit matriciellement*

$$X \mapsto AX \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Remarque: une translation t de vecteur u non nul de $\mathbb{R}^2$ n'est pas une application linéaire car $t(0_{\mathbb{R}^2}) = u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

III.2 Noyau et image d'une AL

Proposition 20 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On pose*

$$Ker\, f = \{x \in E \quad | \quad f(x) = 0\} \quad et \quad Im\, f = \{f(x) \quad | \quad x \in E\}.$$

($\star$) *$Ker\, f$ est un sev de E et $Im\, f$ un sev de F.*

Proposition 21 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a*

($\star$) *f injective ssi $Ker\, f = \{0\}$ et f surjective ssi $Im\, f = F$.*

Le noyau mesure le défaut d'injectivité d'une AL. C'est un outil très pratique pour tester l'injectivité d'une AL.

Exercice 14 Déterminer le noyau et l'image des AL suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x - y, 0, x)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y - z, x + 2y + 4z)$.
3. $D : \mathbb{K}[X] \to K[X]$ définie par $D(P) = P'$ (endomorphisme dérivation)

Proposition 22 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si l'on dispose de $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors f est complètement déterminée par l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, et on a :*

$$Im\, f = Vect\,(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Exercice 15 Déterminer l'image de $f(x, y, z) = (x - y + z, x + y, y - z)$

III.3 Opérations sur les AL

Proposition 23

- *Une CL d'applications linéaires (AL) est encore une application linéaire, ainsi $\mathcal{L}(E, F)$ est un sev de $F^E = \mathcal{F}(E, F)$.*
- *La composée de deux AL est encore une AL, ainsi $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.*
- ($\star$) *Si f est une AL bijective, alors son application réciproque f^{-1} est encore une AL, ainsi l'ensemble des automorphismes de E noté $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé groupe linéaire.*

IV Sommes de deux sev

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, les sous-espaces vectoriels Vect$\,(\overrightarrow{i})$ et Vect$\,(\overrightarrow{j})$ jouent un rôle privilégié. Nous allons préciser cela et généraliser.

Proposition 24 *Soit E_1 et E_2 deux sev de E, on pose $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 \quad | \quad (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2\}$. L'ensemble $E_1 + E_2$ est un sev de E appelé somme de E_1 et E_2.*

Définition 25 (Somme directe) *Soit E_1 et E_2 deux sev de E.*

1. *La somme $E_1 + E_2$ est dite directe si tout vecteur de $E_1 + E_2$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de E_1 et de E_2.*

2. *Si de plus, $E = E_1 + E_2$, on dit que les espaces E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E. Cela revient à dire que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. On écrit alors $E = E_1 \oplus E_2$.*

Exemple: On a $\mathbb{R}^2 = \overrightarrow{(}i) \oplus \overrightarrow{(}j)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 On pose $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ et $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$. Montrer que $P + Q = \mathbb{R}^3$ mais que la somme $P + Q$ n'est pas directe.

Proposition 26 (Caractérisation des sommes directes) *On a*

$$E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow (E = E_1 + E_2 \quad et \quad E_1 \cap E_2 = \{0\}).$$

Exercice 17 Démontrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = S_2(\mathbb{K}) + T_2^+(\mathbb{K})$. La somme est-elle directe ?

V Endomorphismes remarquables

V.1 Projection et projecteur

Définition 27 *Si $E = E_1 \oplus E_2$ et $x = x_1 + x_2 \in E$, on appelle projection sur E_1 parallèlement à E_2, l'application $p : E \to E$ définie par $p(x_1 + x_2) = x_1$.*

Remarque : on a $\operatorname{Ker} p = E_2$ et $\operatorname{Im} p = E_1$.

Proposition 28 (Lien entre projection et projecteur) *On appelle projecteur tout endomorhisme p vérifiant $p \circ p = p$.*

1. *Une projection p est linéaire et vérifie $p \circ p = p$, c'est donc un projecteur.*
2. *Réciproquement ($\star$) , si p est un projecteur de E, alors $E = Im p \oplus Ker p$ et p est la projection sur $Im p$, parallèlement à $Ker p$.*

Remarque: si p (resp. q) est la projection sur E_1 (resp. E_2), parallèlement à E_2 (resp. E_1), alors $p + q = \mathrm{id}$.

Exercice 18 (Exemples modèles dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)

1. On note Δ et Δ' les droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations $y = x$ et $y = 2x$. Déterminer le projeté sur Δ parallèlement à Δ'.
2. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ et $\Delta = \operatorname{Vect}\{(2, 0, 3)\}$ une droite. Déterminer le projeté sur P parallèlement à Δ.

V.2 Symétrie

Définition 29 *si $E = E_1 \oplus E_2$ et $x = x_1 + x_2 \in E$, on appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, l'application $s : E \to E$ définie par*

$$s(x_1 + x_2) = x_1 - x_2.$$

Remarque:

- le point x_1 est le milieu de x et $s(x)$, on en déduit la relation $p = \frac{\text{id}+s}{2}$ ou $s = 2p - \text{id}$.
- si $x \in E_1$, on a $s(x) = x$, donc $x \in \text{Ker}(s - \text{id})$ et si $x \in E_2$, on a $s(x) = -x$ donc $x \in \text{Ker}(s + \text{id})$.

Proposition 30 (Caractérisation des symétries vectorielles) *On appelle symétrie vectorielle tout endomorphisme s vérifiant $s \circ s = id$.*

1. *Une symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est bien une symétrie vectorielle.*
2. ($\star$) *Réciproquement si s est une symétrie vectorielle, alors les espaces $Ker(s - id)$ et $Ker(s + id)$ sont supplémentaires,*

$$\boxed{(s^2 = id) \Rightarrow E = Ker(s - id) \oplus Ker(s + id)}.$$

De plus s est la symétrie par rapport à $Ker(s - id)$ (ensemble des vecteurs invariants par s) parallèlement à $Ker(s + id)$ (ensemble des vecteurs transformés en leur opposé par s).

Exemple: l'endomorphisme transposition que l'on note $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\text{Ker}(\phi - \text{id}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = M\} = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$et $\text{Ker}(\phi + \text{id}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = -M\} = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, cela remontre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\phi - \text{id}) \oplus \text{Ker}(\phi + \text{id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

V.3 Homothétie et Translation dans un espace vectoriel

Définition 31 (Homothétie, translation)

1. *Si $k \in \mathbb{K}$, on appelle homothétie vectorielle de rapport k, l'application $h : E \to E$ définie par $h(x) = kx$.*
2. *Si u est un vecteur non nul de E, on appelle translation de vecteur u l'application $t : E \to E$ définie par $t(x) = x + u$.*

Remarque:

- une homothétie est linéaire mais pas une translation de vecteur u non nul (car $t(0) = u \neq 0$).
- On en déduit une interprétation géométrique des sev : un ensemble F est un sev de E s'il est stable par homothétie vectorielle et par translation par des vecteurs de F.

VI Notion de sous-espace affine

Les éléments d'un espace vectoriel E sont en premier lieu des vecteurs mais peuvent s'interpréter comme des points. En effet si on fixe une origine O, on identifie le vecteur $\overrightarrow{u}$ au point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. On choisira comme origine O le vecteur nul 0_E,ainsi pour tout point A et B de E, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $B - A$. En particulier pour tout $M \in E$, on a $M - 0 = \overrightarrow{OM}$, d'où l'identifcation $M = \overrightarrow{OM}$.

Définition 32 (sous-espace affine) *Soit $\mathcal{F}$ une partie de E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E s'il est l'image d'un sev F de E par une translation de vecteur $u \in E$, c'est-à-dire $\mathcal{F} = u + F$. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés des points.*

Le sous-espace vectoriel F est unique, on l'appelle la direction de $\mathcal{F}$.

Proposition 33 (Caractérisation d'un sous-espace affine par un point et sa direction) *Soit $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E de direction F. Si A est un point de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} = A + F$.*

Exemple: le plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 5$ est un plan affine passant par le point $A(5, 0, 0)$ et dirigé par le plan vectoriel P d'équation $x + y + z = 0$.

Proposition 34 (opérations sur les sous-espaces affines)

- *l'intersection de sous-espaces affines $\cap_i \mathcal{F}_i$ est soit vide soit un sous-espace affine de direction l'intersection $\cap_i F_i$.*
- *l'image du sous-espace affine $\mathcal{F} = A + F$ (passant par le point A, de direction F) par une application linéaire f est le sous-espace affine $f(A) + f(\mathcal{F})$ (passant par le point $f(A)$, de direction $f(F)$).*

Exercice 19 l'image d'un segment par un AL est un point ou un segment.

Voici un moyen pratique de reconnaître des sous-espaces affines.

Proposition 35 (Équation linéaire) $(\star)$ *si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, les solutions de l'équation $u(x) = b$ avec $b \in F$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}\, u$.*

Exemples divers : droites et plans affines de $\mathbb{R}^n$, solutions de systèmes linéaires, solutions d'équations différentielles linéaires avec second membre.