Un nouvel outil pour les limites : les équivalents

.1 Définitions

Définition 1 *On dit qu'une fonction f est équivalente à une fonction g au voisinage de a, on note $f(x) \sim_a g(x)$ (a pouvant être aussi $\pm\infty$), si g ne s'annule pas au voisinage de a privé de a et si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarque: si $\lim_a \frac{f}{g} = +\infty$, on dit que f est prépondérante devant g. Si $\lim_a \frac{f}{g} = 0$, on dit que f est négligeable devant g. C'est équivalent à dire que g est prépondérante devant f.

Exercice 1 Démontrer les équivalents suivants :

1. $3x + 5 \sim_{+\infty} 3x$
2. $3x + 5 \sim_0 5$
3. $5x^2 - 3x + 1 \sim_{+\infty} 5x^2$
4. $5x^2 - 3x + 2\ln x \sim_{+\infty} 5x^2$
5. $5x^2 - 3x + 2\ln x \sim_0 2\ln x$
6. $\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{x} \sim_{+\infty} \sqrt{x}$

.2 Équivalents usuels

Proposition 2 (Cas des fonctions polynomiales) *On a :*

- *au voisinage de $\pm\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.*
- *au voisinage de 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré.*

Proposition 3 (Équivalents usuels en 0) *Si une fonction f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors*

$$f(x) - f(a) \sim_{x\to a} f'(a)(x-a).$$

On en déduit les équivalents usuels suivants au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \sim_0 x, \quad \sin x \sim_0 x, \quad e^x - 1 \sim_0 x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$$

.3 Propriétés

Proposition 4 (Relation d'équivalence) *La relation «être équivalent en a» est un exemple de relation d'équivalence :*

- *réflexive : $f \sim_a f$*
- *symétrique : si $f \sim_a g$, alors $g \sim_a f$.*
- *transitive : si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$, alors $f \sim_a h$.*

Proposition 5 *Si $f \sim_a g$ et que f admet une limite (finie ou infinie) en a, alors g admet une limite en a et $\lim_a f = \lim_a g$.*

Remarque: la réciproque est fausse car x et x^2 tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ mais x^2 n'est pas équivalent à x en $+\infty$.

Proposition 6 (Produit et quotient d'équivalents) *On peut faire des produits et des quotients d'équivalents : si $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$, alors $f \times u \sim_a g \times v$ et $\frac{f}{u} \sim_a \frac{g}{v}$.*

Remarque: c'est faux pour les sommes ou les composés. Par exemple, en 0, on a $\mathrm{e}^x \sim 1$ et $-1 \sim -1$, si on somme les équivalents,on a $\mathrm{e}^x - 1 \sim 0$ ce qui est faux.

De même, on a en $+\infty$, $x \sim x+1$, si on compose par exp, on obtient $\exp(x+1) \sim \exp(x)$, ce qui est faux car $\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}$ ne tend pas vers 1.

.4 Quelques exercices supplémentaires

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

1. $\frac{5x^3-8x^2+3}{(x-2)(3x^2-5x+3)}$ en $+\infty$ 2. $\frac{2x^5-3x+\ln x}{x^5-2x+5}$ en 0 3. $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3(x-5x^3)\sin x}$ en 0

Exercice 3 Donner un équivalent simple en a de

1. $\sqrt{1+x^2}-1$, $a=0$ 2. $\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1$, $a=0$ 3. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, $a=+\infty$

Exercice 4 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en a :

1. $f(x) = \ln(1+x\sqrt{x})$ en $a=0$ 2. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ en $a=1$.

Exercice 5 Déterminer la nature de la branche infinie en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Exercice 6 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^{\frac{x}{1-x}}$. Calculer les limites de f en

a) $+\infty$ b) 0 c) 1.

Exercice 7 (Calculs de limites, parfois délicates) Calculer les limites suivantes en $+\infty$:

1. $\exp(-\ln(\ln x))(\ln x)^{12}$ 2. $x^2\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^3$ 3. $x\ln(1+x)-(x+1)\ln x$
4. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 5. $\mathrm{e}^{\cos x}\sin\frac{1}{x}$ 6. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Pour la dernière limite, on pourra déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln(\ln x) - \ln x$.

Exercice 8 (Une étude de fonctions) On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

1. Démontrer que pour tout réel $t>0$, on a $\ln t \geqslant 1-\dfrac{1}{t}$.
2. Déterminer les variations de f (on pourra utiliser l'inégalité précédente).
3. Démontrer que pour X au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(1+X) \sim \ln X$.
4. En déduire la limite de f en 0.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.