Exercices d'oraux accessibles en MPSI

Exercice 1 Soit u une suite réelle et l un réel. On suppose que de toute suite extraite de u , on peut extraire une sous-suite qui converge vers l . Démontrer que la suite u converge vers l .

Exercice 2 (Sinus itéré) On considère la suite u définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Déterminer la nature de u .
2. Déterminer la limite de $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$. En déduire un équivalent de u_n .

Exercice 3

1. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui tend vers 0 en $+\infty$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt = 0.$$

2. En déduire que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + f(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 4 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Démontrer que f est la fonction nulle.

Exercice 6 On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Étudier les extrema de l'application $f : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(\sigma) = \sum_{k=1}^n k\sigma(k).$$

Exercice 7 Démontrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible est équivalente à une matrice nilpotente. Le résultat reste-t-il vraie en remplaçant le mot «équivalente» par semblable ?

Exercice 8 (Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ rencontre $GL_n(\mathbb{R})$) Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(MA) = 0\}.$$

2. Montrer que si $A = \text{diag}(I_r, 0)$, alors H contient une matrice inversible.
3. Cas général : montrer que H contient une matrice inversible .

Exercice 9 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P .

Exercice 10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Démontrer que P' est scindé.

Exercice 11 Démontrer que pour toute matrice A et H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(H) = 1$, on a

$$\det(A + H) \det(A - H) \leq \det A^2.$$