Exercices et corrigés d'oraux accessibles en MPSI

Exercice 1 Soit u une suite réelle et l un réel. On suppose que de toute suite extraite de u, on peut extraire une sous-suite qui converge vers l. Démontrer que la suite u converge vers l.

Exercice 2 (Sinus itéré) On considère la suite u définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Déterminer la nature de u.
2. Déterminer la limite de $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 3

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui tend vers 0 en $+\infty$. Démontrer que
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
2. En déduire que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) + f(x) = 0$, alors
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Corrigé :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A, |g(x)| \leqslant \varepsilon$. D'où pour $x \geqslant A$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t |g(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-x} \underbrace{\int_0^A \mathrm{e}^t |g(t)|\,\mathrm{d}t}_{K} + \mathrm{e}^{-x} \int_A^x \varepsilon \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant K\mathrm{e}^{-x} + \varepsilon \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^A) \\
&\leqslant K\mathrm{e}^{-x} + \varepsilon(1 - \mathrm{e}^{A-x}) \\
&\leqslant K\mathrm{e}^{-x} + \varepsilon
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} K\mathrm{e}^{-x} = 0$, il existe $B > A$ tel que pour $x > B$, $K\mathrm{e}^{-x} < \varepsilon$.
Ainsi pour $x \geqslant B$, on a
$$\left|\mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f'(x) + f(x)$. Comme f est de classe C^1, la fonction g est continue. La fonction f est ainsi solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y' + y = g$, donc de la forme

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t g(t) \,\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, la fonction g tend vers 0 en $+\infty$, ce qui permet de conclure d'après la première question.

Exercice 4 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|.$$

Démontrer que f est la fonction nulle.

Corrigé : Puisque le degré de P est impair, P s'annule en un certain $a \in \mathbb{R}$ (d'après le TVI et les limites en $\pm\infty$). Mais alors, la domination par $|P(a)| = 0$ montre que les dérivées n-ièmes de f sont nulles en a. Alors f est égale à son reste intégral de Taylor. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|f^{(n+1)}|$ est dominée par $|P|$, on note M le maximum de $|P|$ sur le segment d'extrémité a et x. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(t-a)^n}{n!} \,\mathrm{d}t \right| \leqslant M \left| \int_a^x \frac{|t-a|^n}{n!} \,\mathrm{d}t \right| = M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On conclut en faisant tendre n vers $+\infty$.

Remarque : le résultat ne subsiste pas si le degré de P est pair, par exemple, la fonction sinus et toutes ses dérivées n-ièmes sont bornées par 1, donc dominées par le polynôme constant égal à 1 ou $P = X^2 + 1$.

Exercice 6 On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

Étudier les extrema de l'application $f : S_n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} k\sigma(k).$$

Exercice 7 Démontrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible est équivalente à une matrice nilpotente. Le résultat reste-t-il vraie en remplaçant le mot «équivalente» par semblable ?

Exercice 8 (Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ rencontre $GL_n(\mathbb{R})$) Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \quad \mathrm{Tr}(MA) = 0\}.$$
2. Montrer que si $A = \mathrm{diag}(I_r, 0)$, alors H contient une matrice inversible.
3. Cas général : montrer que H contient une matrice inversible .

Exercice 9 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

Corrigé :

Le polynôme nul et les polynômes de degré 1 sont solutions mais pas les polynômes constants non nuls. Il suffit de chercher P unitaire car si P est unitaire est solution, alors pour tout réel λ non nul, le polynôme λP est solution.

Analyse :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 2$ tel que P' divise P. Alors $P = P' \frac{(X-a)}{n}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Je propose alors trois preuves différentes.

1. Méthode 1 : on a
$$\frac{P'}{P} = \frac{n}{X-a}.$$
Or comme P est scindé sur $\mathbb{C}$, il s'écrit $P = (X-a_1)^{r_1} \times \cdots \times (X-a_k)^{r_k}$ et la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est
$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i}{X-a_i}.$$
Par unicité de cette décomposition en éléments simples, on a que a est l'unique racine complexe de P et donc $P = (X-a)^n$.
2. Méthode 2 : considérons la fonction f définie sur $]a, +\infty[$ par $f(x) = P(x)$.
Comme $P' - n\frac{P}{X-a} = 0$, la fonction f est solution sur $]a, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $\quad y' - \frac{n}{x-a}y = 0$.
Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{n\ln(x-a)} = k(x-a)^n$ avec $k \in \mathbb{R}$. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > a$, $f(x) = k(x-a)^n$. Si l'on note Q le polynôme $k(X-a)^n$, on voit donc que $P = Q$ car P et Q coïncident sur $]a, +\infty[$, donc en une infinité de valeurs. Puisque P est unitaire, $k = 1$ et donc $P = (X-a)^n$.

3. Méthode 3 : on a $nP = P'(X-a)$ donc a racine de P. En dérivant, on obtient $nP' = P''(X-a) + P'$ donc

$$(n-1)P' = P''(X-a)$$

et a racine de P'' car $n-1>0$.

On redérive et donc $(n-1)P'' = P^{(3)}(X-a) + P''$ d'où

$$(n-2)P'' = P^{(3)}(X-a)$$

et a racine de P'' lorsque $n-2>0$. On reitère et on obtient

$$(n-(n-1))P^{(n-1)} = P^{(n)}(X-a)$$

donc $P^{(n-1)} = P^{(n)}(X-a)$ et donc a racine de $P^{(n-1)}$.

Ainsi a est racine d'ordre n de P qui est de degré n, donc $P = (X-a)^n$.

4. Méthode 4 : si P est solution, alors $P = P'Q$ d'où en dérivant $P' = P''Q + P'Q'$, ce qui montre que P' divise P'' et donc que P' est encore solution. En réitérant le procédé, si n est le degré de P, on a que $P^{(n-1)}$ divise $P^{(n-2)}$. Or $\deg P^{(n-1)} = 1$ et $\deg P^{(n-2)} = 2$, donc nécessairement $P^{(n-2)}$ est scindé. En réitérant, on obtient que P est scindé.

   Supposons maintenant que P admette plusieurs racines réelles et notons a et b deux racines consécutives de P, alors d'après Rolle il existe $c \in]a,b[$ tel que $P'(c) = 0$ mais alors $P(c) = 0$ car $P(c) = P'(c)Q(c)$, contracidction. Donc P est scindé sur $\mathbb{R}$ et admet une unique racine donc, il est de la forme $P = \lambda(X-a)^n$.

Synthèse : réciproquement les polynômes de la forme $(X-a)^n$ avec $n \geqslant 2$. conviennent.

$\boxed{\text{Les solutions sont donc les polynômes de la forme } \lambda(X-a)^n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.}$

Exercice 10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Démontrer que P' est scindé.

Exercice 11 Démontrer que pour toute matrice A et H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}(H) = 1$, on a

$$\det(A+H)\det(A-H) \leqslant \det A^2.$$