TP MAPLE N°6 : calcul matriciel

1 Cours

Avec la version Maple que nous utilisons, c'est-à-dire Maple V, nous allons au préalable charger la librairie `linalg` (Linear Algebra) en utilisant l'instruction `with(linalg);` (pour ceux qui possèdent une version Maple plus récente, la librairie s'appelle LinearAlgebra).

1.1 Le type matrice

Il y a plusieurs façons de définir une matrice :

```
A:= matrix( [[1,2,3],[4, 5, 6]]); # matrice définie par ses lignes
A:= matrix(2,3,[1,2,3,4, 5, 6]);  # définie par son format puis par ses coefficients lus en ligne
A:= matrix( 1,3, [4,5,6])   # matrice ligne
A:= matrix(2 ,3)  # matrice dont les coefficients sont des variables libres
A:= diag(1,4,5)  # matrice diagonale
A:= randmatrix(2,3)  # matrice aléatoire
```

Si l'on connaît une formule pour les coefficients a_{ij} de la matrice, on peut utiliser :

```
f:= (i,j) -> cos(i-j) # crée la fonction donnant les coefficients
A:= matrix( 2,3, f) # crée la matrice
```

On peut aussi fabriquer une matrice en concaténant des vecteurs avec `concat`. Cela peut être utile, par exemple pour écrire des matrices de passage.

On accède au coefficient a_{ij} de la matrice A à l'aide de `A[i,j]`.

1.2 Opérations sur les matrices

Pour observer le résultat d'une opération matricielle, on devra utiliser l'instruction `evalm` (evaluation de matrice). Par exemple, pour la somme de deux matrices `evalm(A + B)`, et pour la différence `evalm(A - B)` .

Attention pour le produit matriciel : `evalm(A &* B)`

La fonction puissance est notée comme pour les nombres.

On obtient l'inverse d'une matrice A inversible à l'aide de `evalm(A^(-1))`

Quelques fonctions classiques : déterminant (`det`), noyau (`kernel`), transposée (`transpose`), rang (`rank`).

Citons aussi pour le plaisir la fonction «surpuissante» `jordan` qui renvoie la décomposition de jordan d'une matrice A (c'est une matrice simple (diagonale lorsque cela est possible) qui est semblable à A) et la matrice de passage associée.

1.3 Résolution de sytèmes linéaires

On peut bien sûr résoudre un système linéaire décrit par son ensemble d'équations à l'aide la fonction `solve`.

Mais on sait qu'un système linéaire s'écrit matriciellement $AX = B$ avec X la matrice colonne des inconnues. On pourra alors utiliser `linsolve(A,b)` avec b un vecteur.

2 Exercices

Exercice 1 (Une diagonalisation) on note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \mathrm{diag}(1,1,1)$ la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\chi_A(t) = \det(A - tI_3)$ puis déterminer les racines de χ_A. La fonction polynomiale χ_A définit le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer pour chaque racine λ de χ_A, une base du noyau $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$.
3. Démontrer que les **trois** vecteurs obtenus à la question précédente forment une base de $\mathbb{R}^3$.
4. On a vu en TD l'équivalence

$$\text{il existe un vecteur non nul } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } u(x) = tx \Leftrightarrow \chi_A(t) = 0.$$

   En déduire que A est diagonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice diagonale D.
5. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, PD^nP^{-1}. En déduire A^n.

Exercice 2 (Rang d'une matrice) Créer une fonction `A(n)` d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ renvoyant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $a_{ij} = (i+j)^3$. Conjecturer le rang de la matrice $A(n)$ selon la valeur de n.

Exercice 3 (Formule explicite d'une suite récurrente) La suite de Fibonacci (F_n) est la suite définie par $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$ et $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Calculer A^{50}. En déduire F_{50} (réponse 12586269025).
3. On peut montrer en utilisant la même méthode qu'à l'exercice 1 que la matrice A est diagonalisable. Pour gagner du temps, utiliser la fonction `jordan` et donner une matrice diagonale D semblable à A ainsi que la matrice de passage P.
4. En déduire une expression de A^n.
5. En déduire la formule de Binet (on pourra utiliser `expand`).

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Exercice 4 (Une suite linéaire récurrente d'ordre 3) Soit u la suite définie par

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n \quad \text{et} \quad u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer u_{25}.
2. Écrire une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
3. Déterminer une matrice T triangulaire semblable à A à l'aide de la fonction `jordan`.
4. Calculer T^n, en déduire A^n puis une formule explicite pour u_n.

Exercice 5 (Maple fatigué ?) Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Calcul de commuttant) Le commutant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \quad KM = MK\}.$$

Pour chercher le commutant de A :

– on crée une matrice M dont les coefficients sont des variables libres
– on convertit la matrice $AM - MA$ en un *ensemble* de coefficients avec `convert( evalm( A & *M -M &*A), set )`
– on résoud le système constitué par ces ensembles de coefficients (on note `sol` les solutions).
– on assigne les valeurs trouvées à M avec `assign` puis on l'évalue.

1. Déterminer le commu tant de la matrice A de l'exercice 1 et donner sa dimension.
2. Écrire une fonction `commutant(A)` d'argument A une matrice carrée à coefficients réeels renvoyant le commutant de A.