TP MAPLE N°2 : calculs algébriques

1 Transformation d'expressions

Nous savons développer, factoriser, réduire au même dénominateur...Maple aussi, mais il faut savoir lui demander. Pour cela nous allons découvrir les fonctions suivantes : `expand, factor, normal, collect, simplify, combine, .`

1.1 Outils algébriques

1. La fonction `expand` permet de développer (par exemple `expand(a+b+c)^2)`, et elle s'applique aussi à des expressions trigonométriques `expand(cos(4*x))`.
2. La fonction `factor` permet de factoriser (exemple : `factor(x^3+y^3)`) , avec l'argument facultatif `complex`, on factorise sur $\mathbb{C}$: `factor(x^3+1,complex)`.
3. La fonction `collect` permet de regrouper les termes d'une somme selon les puissances d'une variable *var* de votre choix. Par exemple *var* peut être égale à x, $\sin x$, $\exp(x)$... La syntaxe est `collect(expression,var)`. Si $G = ax^3+ba^4x+cx^2+a^2x^3-adx+d^2x$, taper `collect(G,x)` puis collect`(G,a)`. Taper aussi `collect(H,exp(x))` où $H = xe^x + 3e^x - \frac{1}{e^x} + \frac{2x}{e^x}$.
4. La fonction `normal` permet entre autre de réduire au même dénominateur.
   Taper $F := 5*x/(x^2-1)+x/(x-1)$ puis `normal(F)`
5. Les fonctions `numer` et `denom` permettent d'extraire respectivement le numérateur et dénominateur d'une fraction. Exemple : `numer(a*b/c)`.

1.2 La fonction `simplify`

Il y a essentiellement trois utilisations :

- la «simple» : `simplify(cos(x))^2 + sin(x))^2)`. Simplifier à votre tour $\dfrac{x^2-1}{x+1}$. Mais attention, simplify n'a pas de pouvoir magique.
- simplification avec hypothèse : la simplification $\sqrt{x^2} = -x$ n'étant valable que pour $x \leqslant 0$, on doit le signaler avec `assume(x<=0)`.
- simplification avec expression : l'instruction `simplify(x^2+y^2,x+y=1)` simplifie l'expression x^2+y^2 sachant que $x+y=1$.

1.3 Outils trigonométriques

- Pour écrire $\cos(4x)$ comme un polynôme en $\cos x$, taper `expand(cos(4*x))`.
- La fonction `combine` permet aussi de regrouper des termes de même nature (termes trigonométriques, exponentiels, logarithmes ou puissances). En particulier, elle permet de **linéariser** les expressions trigonométriques. Linéariser $\cos(p)\cos(q)$ puis $\cos(2x)\sin x + \sin^4 x$.

1.4 La fonction `subs`

La fonction `subs` (abréviation de *substitution*) permet de remplacer dans une expression une variable (ou plus généralement une opérande) par une autre variable (ou opérande). Exemple : `a :=expand(cos(4*x)) ; subs(cos(x)=X,a) ;` vous donne le polynôme de Tchebychev d'indice 4.

2 Pour créer une fonction

Pour créer une fonction, deux possibilités : l'opérateur flèche ou la fonction `unapply`.

- utiliser l'opérateur flèche, par exemple `f := x->x^2+x+1` puis `f(1), f(2),f(3)`.
  De la même façon, on construit des fonctions à plusieurs variables : `toto :=(x,y)->x^2+x*y+3*y` . Regarder `toto(1,3)`.

– utiliser `unapply` qui permet de transformer une expression algébrique $f(x)$ en la fonction $x \mapsto f(x)$.
  Par exemple `pif : =unapply(x^2+x+1,x) ; pif(1) ;` Cette méthode est utile pour «récupérer» des expressions calculées précédement par Maple.

Attention à ne pas confondre la fonction f et l'expression algébrique $f(x)$. Par exemple, définir la fonction $f : x \mapsto 2x+1$ puis taper `whattype(f)` et `whattype(f(x))`. Commenter

3 Résolution d'équations algébriques

Pour résoudre des équations ou des systèmes ou des inéquations, les principales fonctions sont `solve, allvalues, fsolve`.

4 Les exercices

Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants (utiliser `solve` puis interpréter géométriquement :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 5z & = & 10 \\ 3x & + & y & - & 3z & = & -9 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 2 Résoudre $\cos x = 0$. Commenter puis regarder de l'aide sur solve et sur `EnvAllSolutions`

Exercice 3 Déterminer avec Maple les 9 couples solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccc} x^3 & = & 7x+3y \\ y^3 & = & 7y+3x \end{array}\right.$$

Exercice 4 Écrire $(2x+3y-z)^{12}$ sous forme d'un polynôme en y, isoler le coefficient de y^5 avec `coeff`.

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(z) = \dfrac{z^2}{\overline{z}-2i}$.

1. Déterminer les antécédents de $1+i$ par f.
2. Déterminer l'écriture algébrique de $f(z)$, en déduire la nature géométrique de l'ensemble Γ des points d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.
3. Représenter graphiquement cet ensemble à l'aide de l'instruction `implicitplot` (attention, il faut au préalable charger la bibliothèque plots en tapant `with(plots)`).

Exercice 6 (Sphère) Dans un repère orthonormé, on considère les 4 points :

$$A(1,2,3), \quad B(2,4,-5), \quad C(0,1,-6), \quad D(-1,0,7).$$

1. Créer une fonction f qui à un vecteur de coordonnées (x,y,z) associe sa norme au carré, c'est à dire $x^2+y^2+z^2$.
2. Trouver le centre et le rayon de la sphère passant par ces 4 points (on pourra résoudre un système).

Exercice 7 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère la partie Γ du plan d'équation cartésienne $2x^2+y^2+\sqrt{3}xy = \frac{1}{2}$.

1. Donner l'équation cartésienne de Γ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ avec $\theta = \frac{\pi}{6}$.
2. Représenter graphiquement Γ avec la fonction `implicitplot` (attention charger avant la librairie plots).

Exercice 8 (Irrationalité de $\cos\frac{\pi}{7}$)

1. Déterminer un polynôme T tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(7x) = T(\cos(x))$. On pourra utiliser `expand` et `subs`.
2. Factoriser le polynôme $T+1$.

3. On pose $Q = 1 - 4X - 4X^2 + 8X^3$. Justifier que si a est une racine de Q, alors $2a$ est racine d'un polynôme de degré 3 que l'on déterminera.
4. En déduire que $2\cos\frac{\pi}{7}$ est une racine du polynôme $P = 1 - 2X - X^2 + X^3$.
5. Démontrer que P admet une seule racine réelle.
6. Soit $r = \frac{p}{q}$ une racine rationnelle de P avec p et q premiers entre eux. Démontrer que $p = \pm 1$ et $q = \pm 1$.
7. Conclure que $\cos\frac{\pi}{7}$ est irrationnel.