

# Un peu de topologie avec l'ensemble des matrices diagonalisables

## Exercice (Un résultat de densité)–

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans  $M_p(\mathbb{C})$ .
2. En déduire le théorème de Cayley Hamilton.
3. Le résultat de la question 1 est-il vrai pour  $M_p(\mathbb{R})$ ?

## Corrigé.

1. Soit  $M \in M_p(\mathbb{C})$ . Cette matrice est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{C}$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  ses valeurs propres distinctes et  $n_1, \dots, n_p$  les multiplicités associées. Il existe donc une matrice  $P \in Gl_p(\mathbb{C})$  telle que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} P^{-1} = PTP^{-1}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on va commencer par "séparer" les valeurs propres distinctes. On peut trouver un petit rayon  $\rho$  avec  $0 < \rho < \varepsilon$ , pour lequel les disques  $D(\lambda_1, \rho), \dots, D(\lambda_s, \rho)$  sont distincts deux à deux ( $D(a, r)$  désigne le disque fermé de centre  $a$  et de rayon  $r$ ). Enfin, dans chacun de ces disques (qui sont des parties infinies de  $\mathbb{C}$ ), donc pour tout  $i$ , on peut choisir  $n_i$  complexes  $z_1^i, \dots, z_{n_i}^i$  distincts deux à deux (on peut même expliciter:  $z_1^i = \lambda_1 + \frac{\rho}{1}, \dots, z_{n_i}^i = \lambda_1 + \frac{\rho}{n_i}$ ). Les nombres complexes  $z_1^1, \dots, z_{n_1}^1, \dots, z_s^s$  sont donc par construction  $p$  nombres complexes deux à deux distincts. On considère alors la matrice

$$M_\varepsilon = P \begin{pmatrix} z_1^1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & z_s^{n_s} \end{pmatrix} P^{-1} = PT_\varepsilon P^{-1}.$$

Cette matrice de  $M_p(\mathbb{C})$  possède  $p$  valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. On choisit maintenant sur  $M_p(\mathbb{C})$  la norme du sup des coefficients, si

$$M = (m_{ij}), \quad \|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{ij}|.$$

On démontre facilement que si  $A, B \in M_p(\mathbb{C})$ ,  $\|AB\| \leq p\|A\|\|B\|$ , (elle est presque sous-multiplicative) ainsi

$$\|M - M_\varepsilon\| = \|P(T - T_\varepsilon)P^{-1}\| \leq \underbrace{p\|P\|\|P^{-1}\|}_k \|T - T_\varepsilon\| \leq k\varepsilon,$$

Ceci achève la preuve, puisque si  $\varepsilon$  tend vers 0, la matrice  $M_\varepsilon$  tend vers  $M$  pour la norme  $\|\cdot\|$  donc pour toute norme puisqu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

2. Montrons que Cayley Hamilton est vrai pour les matrices diagonalisables. Soit  $A \in M_p(\mathbb{C})$ , une matrice diagonalisable, on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres. Il existe  $P$  inversible telle

que  $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) P^{-1}$ . Pour tout polynôme  $Q$ , on a  $Q(PDP^{-1}) = PQ(D)P^{-1}$  (l'écrire c'est un petit calcul formel), donc en particulier on a

$$\chi_A(A) = P \chi_A(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)) P^{-1} = P \operatorname{diag}(\chi_A(\lambda_1), \dots, \chi_A(\lambda_s)) P^{-1} = 0$$

puisque les  $\lambda_i$  sont les racines de  $\chi_A$ .

Supposons maintenant que  $A$  est quelconque, par densité, il existe  $(A_n)$  une suite de matrices diagonalisables qui converge vers  $A$ . Pour tout  $n$ ,  $\chi_{A_n}(A_n) = 0$ , il suffit maintenant de passer à la limite, mais pour ce fait, il nous faut la continuité de l'application  $f : M \mapsto \chi_M(M)$ . Les coefficients du polynôme  $\chi_M$  sont des polynômes en les coefficients de  $M$ , puisque lorsqu'on calcule un déterminant, on ne fait que des produits et des sommes. On en déduit donc que les coefficients de la matrice  $\chi_M(M)$  sont des polynômes en les coefficients de la matrice  $M$ , ce qui prouve la continuité de  $f$ . Puisque pour tout  $n$ ,  $f(A_n) = 0$ , par continuité de  $f$ , on a  $f(A) = \chi_A(A) = 0$ , ce qui achève la preuve.

**Remarque:** Puisque toute matrice de  $M_p(\mathbb{R})$  est dans  $M_p(\mathbb{C})$ , Cayley-Hamilton est encore vrai pour les matrices de  $M_p(\mathbb{R})$ .

Nous venons donc de voir que l'application  $M \mapsto \chi_M$  de  $M_p(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}_p[X]$  était continue puisque les coefficients de ce polynôme sont des polynômes en les coefficients de la matrice. Signalons qu'il n'en est pas de même pour l'application qui à une matrice associe son polynôme minimal. En effet, la suite  $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  tend vers la matrice nulle. Pour tout  $n$ , le polynôme minimal de  $A_n$  est  $X^2$ , il ne peut donc tendre vers  $X$  le polynôme minimal de la matrice nulle.

3. La preuve de la question 1 montre en fait que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables. Mais puisque tout polynôme ne scinde pas sur  $\mathbb{R}$ , il semble naturel que l'ensemble des matrices diagonalisables ne soit pas dense dans  $M_p(\mathbb{R})$ . Pour le prouver, il suffit d'exhiber une matrice  $M$  qui ne soit pas limite d'une suite de matrices diagonalisables. On va le faire en taille 2. Il faut évidemment choisir  $M$  parmi les matrices non trigonalisables, on peut penser à une matrice de rotation (qui n'admet aucune valeur propre), par exemple  $M = R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique est  $X^2 + 1$ , son discriminant est strictement négatif. Supposons qu'il existe une suite de matrices diagonalisables  $(M_n)$  qui converge vers  $M$ . Pour tout  $n$ , le discriminant de  $M_n$  est positif ou nul puisque son polynôme caractéristique est scindé. Or l'application  $\Delta$  de  $M_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  qui à une matrice associe le discriminant de son polynôme caractéristique est continue. En effet le discriminant est un polynôme en les coefficients du polynôme caractéristique (le fameux  $b^2 - 4ac$ ), qui eux-mêmes sont des polynômes en les coefficients de la matrice, au final le discriminant est un polynôme en les coefficients de la matrice. Pour tout  $n$ ,  $\Delta(M_n) \geq 0$ , d'où en passant à la limite,  $\Delta(A) \geq 0$ , contradiction.

**Remarque:** On peut prouver que l'adhérence dans  $M_p(\mathbb{R})$  de l'ensemble des matrices diagonalisables est exactement l'ensemble des matrices trigonalisables de  $M_p(\mathbb{R})$  (la question 1 prouve une inclusion). Pour la deuxième, on peut regarder [Beck] (Objectif Agrégation) p 179.

### Quelques compléments:

On note  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  l'ensemble des matrices diagonalisables de  $M_p(\mathbb{K})$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

▷ Montrons que  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  **n'est pas ouvert** dans  $M_p(\mathbb{K})$ . Pour cela, il suffit de prouver que son complémentaire n'est pas fermé dans  $M_p(\mathbb{K})$ . On va exhiber une suite de matrices non diagonalisables qui converge vers une diagonalisable. Il suffit d'avoir l'idée en taille 2, les matrices nilpotentes non nulles ne sont pas diagonalisables, il est donc naturel de penser à elles. Soit  $n \geq 1$ , on pose  $M_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , elle n'est pas diagonalisable et elle converge vers la matrice nulle qui est bien sûr diagonalisable. Pour  $p \geq 3$ , il suffit de poser considérer  $\operatorname{diag}(M_n, 0, \dots, 0)$ .

En fait on peut démontrer, mais c'est plus délicat que l'intérieur de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  dans  $M_p(\mathbb{C})$  est l'ensemble des matrices diagonalisables à spectre simple. On pourra consulter à nouveau [Beck] p 178. L'ensemble  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  contient l'ensemble des matrices diagonalisables à spectre simple qui est un ouvert dense de  $M_p(\mathbb{C})$ , c'est une grosse partie. Pour ce qui concerne un peu de théorie de Baire, on dit que  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  est une **partie grasse**. On peut énoncer en un certain sens que **la plupart des matrices carrées complexes sont diagonalisables (et à spectre simple)**.

De même, on peut dire que la plupart des matrices carrées complexes ou réelles sont inversibles puisque  $Gl_p(\mathbb{K})$  est un ouvert dense de  $M_p(\mathbb{K})$ .

▷  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  est **un cône**. En effet, si  $M$  est diagonalisable, pour tout réel  $\lambda$ , la matrice  $\lambda M$  est encore diagonalisable (si  $M = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale,  $\lambda M = P\lambda DP^{-1}$  avec  $\lambda D$  diagonale). On en déduit que  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  est une partie **connexe par arcs** de  $M_p(\mathbb{K})$ . En effet, on peut relier toute matrice diagonalisable à la matrice nulle par un segment. En revanche, ce cône n'est pas convexe, puisque le "milieu" des matrices diagonalisables  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  qui n'est pas diagonalisable.

▷ Terminons par une dernière propriété illustrant le fait que  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  est une grosse partie de  $M_p(\mathbb{C})$ . On sait déjà que  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  n'est pas un espace vectoriel puisque non convexe, mais l'espace vectoriel qu'il engendre est gros puisque c'est l'espace tout entier: on a  $\text{Vect}\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = M_p(\mathbb{C})$ . On va le prouver. L'ensemble  $\text{Vect}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_p(\mathbb{C})$ , donc de dimension finie, à ce titre il est donc fermé dans  $M_p(\mathbb{C})$ . On a donc

$$\text{Vect}\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \overline{\text{Vect}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}.$$

Or  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \subset \text{Vect}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  donc  $\overline{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}} \subset \overline{\text{Vect}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}$ , on peut ainsi écrire

$$M_p(\mathbb{C}) = \overline{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}} \subset \overline{\text{Vect}\mathcal{D}_{\mathbb{C}}} = \text{Vect}\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \subset M_p(\mathbb{C}),$$

ce qui prouve par double inclusion l'égalité souhaitée.