Une preuve variationnelle du théorème spectral sans utilisation des extrema liés

Arnaud de Saint Julien

E est un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E , ie

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

On sait que f est diagonalisable en base orthonormée, c'est le théorème spectral. Un des ingrédients¹ de la démonstration est l'existence d'une valeur propre réelle pour f .

Ce dernier résultat peut être obtenu

- bien sûr, en utilisant d'Alembert-Gauss et donc l'existence d'une valeur propre complexe
- en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz²
- en utilisant le théorème des extrema liés.

Cet article propose aussi une démonstration par le calcul différentiel, mais sans passer par le théorème des extrema liés.

Nous cherchons un vecteur propre pour f , donc un vecteur x tel que $f(x)$ soit colinéaire à x . Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que dans ce cas, $\langle f(x), x \rangle$ est maximum (en valeur absolue). Il est donc naturel d'étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \langle x, f(x) \rangle$ sur la sphère unité $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$. L'application φ est continue sur le compact S , donc atteint son maximum en un certain x_0 . C'est notre candidat pour être vecteur propre.

Classiquement, nous allons dégager de l'information sur l'extremum x_0 par le calcul différentiel. L'application φ est différentiable sur S . Pour tout $x \in S$ et pour tout $h \in E$ on a³

$$d\varphi_x(h) = \langle f(x), h \rangle + \langle f(h), x \rangle = 2 \langle f(x), h \rangle \quad \text{car } f \text{ est autoadjoint.}$$

Comme S n'est pas ouvert, on ne peut pas dire que x_0 annule df , c'est pourquoi on peut se tourner vers le théorème des extrema liés. Ici, on va contourner le problème.

Soit x_1 un vecteur unitaire orthogonal à x_0 . On considère le chemin $c :]-\pi, \pi[\rightarrow S$ défini par $c(t) = x_0 \cos t + x_1 \sin t$.

Ce chemin est bien tracé sur S puisque par Pythagore $\|\cos t x_0 + \sin t x_1\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (en dimension 3, il s'agit du grand cercle passant par x_0 et x_1).

On pose $F = \varphi \circ c$. Comme $c(0) = x_0$, F admet un maximum en 0, mais cette fois ci, comme F est différentiable sur l'intervalle **ouvert** $]-\pi, \pi[$, on a $F'(0) = 0$. Or Pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, on a

$$\begin{aligned} F'(t) &= d\varphi_{c(t)}(c'(t)) = 2 \langle f(c(t)), c'(t) \rangle \\ &= 2 \langle f(c(t)), -\sin t x_0 + \cos t x_1 \rangle. \end{aligned}$$

La condition $F'(0) = 0$ donne alors $\langle f(x_0), x_1 \rangle = 0$.

On en déduit que pour tout vecteur unitaire x_1 orthogonal à x_0 , $f(x_0) \perp x_1$, ce qui donne

$$f(x_0) \in ((\mathbb{R}x_0)^\perp)^\perp = \mathbb{R}x_0. \square$$

1. On peut aussi utiliser le fait qu'un endomorphisme réel admet une droite ou un plan stable, et se ramener alors à l'étude d'un endomorphisme symétrique en dimension 2.

2. Pour les deux derniers points, on pourra regarder le document <http://mmths.ifsance.com/domi/cthi-03b15.pdf> de Dominique Hoareau.

3. Par bilinéarité, on a $\varphi(x+h) - \varphi(x) = \langle f(x), h \rangle + \langle f(h), x \rangle + \langle f(h), h \rangle$ et $\langle f(h), h \rangle = o(\|h\|^2)$ car par Cauchy-Schwarz $|\langle f(h), h \rangle| \leq \|f(h)\| \|h\| \leq \|f\| \|h\|^2$.