

Minimisation d'une somme de distances, points de Fermat

Arnaud de Saint Julien

26 décembre 2004

Table des matières

1	Présentation du problème	2
1.1	Définitions et objectifs	2
1.2	Propriétés générales de l'ensemble des points de Fermat	2
2	Etude de la fonction de Fermat dans le cas où les points sont alignés et munis de masses positives	4
2.1	Méthode pour déterminer les points de Fermat	4
2.2	Interprétation statistique	5
3	Etude de la fonction de Fermat dans le cas d'un triangle quelconque	6
3.1	Caractérisation angulaire des points de Fermat	6
3.2	Construction du point de Fermat comme une intersection d'arcs de cercles	7
3.3	Construction du point de Fermat comme une intersection de droites	7
3.4	Etude de la fonction de Fermat sur les sommets	8
4	Introduction aux problèmes de plus court chemin reliant des points	8

1 Présentation du problème

On note $\mathcal{P}$ le plan affine et E le plan euclidien associé. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne.

1.1 Définitions et objectifs

Définition 1.1 Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points du plan. On définit sur $\mathcal{P}$ la **fonction de Fermat**¹, notée f par $f(M) = \sum_{k=1}^n MA_k$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points qui réalisent le minimum pour f . De tels points sont appelés **points de Fermat**: $\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{P}, \forall M \in \mathcal{P}, f(P) \leq f(M)\}$.

On note aussi $A_1A_2\dots A_n$ le polygone formé par l'enveloppe convexe des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

L'objectif de cet exposé est d'étudier les minimums de la fonction de Fermat. Nous verrons que lorsque les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont alignés, le problème est relativement simple à résoudre et on pourra même étendre le résultat au cas où les points sont pondérés avec des masses positives.

Dans le cas où les points ne sont pas alignés, cela sera plus compliqué, et on se limitera au cas de trois points.

Cette difficulté est assez remarquable, car il est facile d'étudier les minimums d'une fonction un peu similaire, la **fonction de Leibniz**, que l'on notera g . Elle est définie par $g(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (MA_k)^2$, où

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des réels (ils représentent des masses dont on affecte les points). Plus précisément, on montre très facilement, que si la somme des masses est non nulle, ie $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$, le minimum de la fonction est atteint en un unique point: le barycentre des points pondérés $A_1, A_2, \dots, A_n$, munis des masses $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Si la somme des masses est nulle, la fonction de Leibniz est constante.

Le point commun des fonctions de Fermat et de Leibniz est que, d'une certaine façon, elles mesurent la distance d'un point M à un ensemble d'autres points. Dans le cas de trois points, minimiser ces deux fonctions peut alors s'interpréter comme la recherche d'un plus court chemin.

Nous parlerons d'ailleurs en dernière partie des problèmes de plus court chemin reliant des points, (**arbres de Steiner**) et nous évoquerons le lien avec les points de Fermat.

Je signale enfin, que nous donnerons une **interprétation statistique** à la fonction de Fermat, c'est assez sympathique vous verrez.

1.2 Propriétés générales de l'ensemble des points de Fermat

Proposition 1.1 La fonction de Fermat admet un minimum, c'est à dire $\mathcal{F}$ est non vide.

preuve: C'est essentiellement un argument de compacité. On fixe un point O de $\mathcal{P}$. f tend vers $+\infty$ lorsque la distance OM tends vers $+\infty$. Donc, il existe un réel strictement positif r tel que, pour tout point M de $\mathcal{P}$, dès que $OM > r$, on ait $f(M) \geq f(O)$. Ainsi, à l'extérieur de la boule de centre O et de rayon r , f est supérieure à $f(O)$. A l'intérieur de cette boule fermée qui est donc compacte puisqu'on est en dimension finie, f qui y est continue admet et atteint son minimum en un point M_0 par exemple. Finalement, pour tout point M du plan, $f(M) \geq \min(f(O), f(M_0))$, ce qui prouve bien que f admet un minimum global. $\square$

Remarque 1.1 Le minimum n'est pas nécessairement réalisé en un seul point. En effet, si A et

1. on utilise aussi souvent le nom de fonction de Steiner, mais cette appellation est surtout utilisé pour les problèmes de recherche de plus court chemin.

B sont deux points distincts du plan, le minimum de $f(M) = MA + MB$ est atteint en tous les points du segment $[AB]$.

Proposition 1.2 $\mathcal{F}$ est une partie convexe de $\mathcal{P}$.

preuve: Pour alléger l'écriture, on identifie $\mathcal{P}$ à E . On note $a_1, a_2, \dots, a_n$ les vecteurs correspondants aux points $A_1, A_2, \dots, A_n$. Soient p et q deux vecteurs de $\mathcal{F}$. Soit $\lambda \in [0, 1]$, montrons que $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est encore dans $\mathcal{F}$. Soit x un vecteur de E ,

$$\begin{aligned} f(\lambda p + (1 - \lambda)q) &= \sum_{k=1}^n \|\lambda p + (1 - \lambda)q - a_k\| \\ &= \sum_{k=1}^n \|\lambda(p - a_k) + (1 - \lambda)(q - a_k)\| \\ &\leq |\lambda| \sum_{k=1}^n \|p - a_k\| + (1 - \lambda) \sum_{k=1}^n \|q - a_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|x - a_k\| + \sum_{k=1}^n \|x - a_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|x - a_k\| = f(x) \end{aligned}$$

Donc $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est encore dans $\mathcal{F}$. $\square$

Proposition 1.3 $\mathcal{F}$ est stable par toute isométrie qui laisse globalement stable l'ensemble des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

preuve: C'est immédiat puisqu'une isométrie conserve les distances. $\square$

Corollaire 1.1 Si le polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ possède un axe de symétrie, alors il existe un point de Fermat sur cet axe.

preuve: Soit P un point où est atteint le minimum. Alors d'après la proposition précédente, son symétrique P' par rapport à l'axe de symétrie est encore un minimum. Puisque $\mathcal{F}$ est convexe, on en déduit que le segment $[PP']$ est inclus dans $\mathcal{F}$. En particulier le point d'intersection de $[PP']$ et de l'axe de symétrie est dans $\mathcal{F}$. Le minimum de f est donc atteint sur un point de cet axe de symétrie. $\square$

Un exercice instructif: Déterminer les points de Fermat dans le cas d'un triangle isocèle. En déduire que l'on peut trouver des triangles où l'isobarycentre est très éloigné des points de Fermat.

Corollaire 1.2 Si le polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ possède un centre de symétrie, alors ce centre de symétrie est un point de Fermat.

preuve: Soit P un point où est atteint le minimum. Alors d'après la proposition précédente, son symétrique P' est encore un minimum. Puisque $\mathcal{F}$ est convexe, on en déduit que le segment $[PP']$ est inclus dans $\mathcal{F}$. En particulier le centre de symétrie est donc un point de Fermat. $\square$

Proposition 1.4 La fonction de Fermat atteint son minimum à l'intérieur du polygone $A_1 A_2 \dots A_n$.

preuve: Le cas où les points sont alignés est très simple.

Supposons donc que les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne pas alignés. Soit P un point extérieur à $A_1 A_2 \dots A_n$ où est atteint le minimum. On trace P' le symétrique de P par rapport à une des arêtes extérieures les plus proches du polygone $A_1 A_2 \dots A_n$. On suppose par exemple que cette arête est $[A_i A_j]$. Elle partage le plan en deux demi-plans. Tous les sommets de $A_1 A_2 \dots A_n$ sont dans le même demi-plan que le point P' (ils peuvent être sur la frontière). Le point P , lui est dans l'autre demi-plan. Si A est un sommet de $A_1 A_2 \dots A_n$, on a donc $AP' \leq AP$ et l'inégalité est stricte dès que A n'est pas sur la droite $(A_i A_j)$. Il existe un tel sommet puisque les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne pas alignés. On a donc $f(P') < f(P)$, ce qui contredit la minimalité de P . $\square$.

2 Etude de la fonction de Fermat dans le cas où les points sont alignés et munis de masses positives

2.1 Méthode pour déterminer les points de Fermat

Dans cette partie, on suppose donc que les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont alignés et munis de masses positives $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. On cherche donc à minimiser $f(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k M A_k$. Quitte à les renuméroter, on peut supposer qu'ils sont alignés dans cet ordre. On va donner un procédé algorithmique pour déterminer les points de Fermat.

On se concentre sur les deux points extrêmes A_1 et A_n . On regarde lequel des deux points possède la masse la plus grande. Supposons par exemple que c'est A_n , on a alors $\alpha_n - \alpha_1 > 0$. On sait d'après la proposition 1.4 que le minimum est atteint à l'intérieur du segment $[A_1 A_n]$. Pour M dans $[A_1 A_n]$, on a alors:

$$\begin{aligned} f(M) &= \underbrace{\alpha_1 A_1 M + \alpha_n M A_n}_{\alpha_1 A_1 A_n} + \alpha_2 M A_2 + \dots + \alpha_{n-1} M A_{n-1} + (\alpha_n - \alpha_1) M A_n \\ &= \alpha_1 A_1 A_n + \alpha_2 M A_2 + \dots + \alpha_{n-1} M A_{n-1} + (\alpha_n - \alpha_1) M A_n \end{aligned}$$

On doit donc minimiser une fonction de Fermat (à une constante additive près) qui n'est plus constituée que de $n - 1$ points: $A_2, \dots, A_n$ affectés des masses $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, (\alpha_n - \alpha_1)$. On peut alors réitérer le procédé...

Exemple :

On veut minimiser la fonction de Fermat définie par $f(M) = 2MA + 6BM + CM + 6DM$ où A, B, C, D sont quatre points alignés dans cet ordre. Le minimum de f est atteint sur $[AD]$. Puisque la masse de D est supérieure à celle de A , on écrit pour M dans $[AD]$,

$$\begin{aligned} f(M) &= \underbrace{2AM + 2MD}_{2AD} + 6MB + MC + 4MD \\ &= 2AD + 6MB + MC + 4MD. \end{aligned}$$

Le minimum est atteint sur $[BD]$, donc pour M dans $[BD]$, on a

$$\begin{aligned} f(M) &= 2AD + \underbrace{4MB + 4MD}_{4BD} + 2MB + MC \\ &= 2AD + 4BD + 2MB + MC \end{aligned}$$

Enfin, pour M dans $[BC]$, on a

$$\begin{aligned} f(M) &= 2AD + 4BD + \underbrace{MB + MC}_{BC} + MB \\ &= 2AD + 4BD + BC + MB \end{aligned}$$

Finalement, on trouve donc que le minimum est atteint au point B .

Remarque: En reprenant les calculs précédents jusqu'à la dernière étape, on montre que le minimum de $f(M) = 2MA + 5BM + CM + 6DM$ (on a remplacé la masse de B qui était 6 par 5) est atteint en tout point du segment $[BC]$.

2.2 Interprétation statistique

On munit le plan d'un repère orthonormal. Quitte à faire une rotation (isométrie), on peut supposer que les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont sur l'axe des abscisses, on note alors $x_1, \dots, x_n$ leur abscisse. Minimiser la fonction de Fermat revient alors à minimiser la fonction à variable réelle

$$f : x \mapsto \alpha_1|x - x_1| + \dots + \alpha_n|x - x_n|.$$

Minimiser la fonction de Leibniz revient à minimiser

$$g : x \mapsto \alpha_1(x - x_1)^2 + \dots + \alpha_n(x - x_n)^2.$$

Il est très facile de prouver que le minimum de g est atteint en $\bar{x}$, la moyenne arithmétique de la série statistique $(x_1, \dots, x_n)$ muni des effectifs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Alors, vous devez commencer à comprendre..., le minimum de f est atteint (notamment) en m_e la médiane de la série statistique $(x_1, \dots, x_n)$ muni des effectifs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Ça y est, le mot est lâché. Le point de Fermat peut s'interpréter non pas comme un point moyen mais plutôt comme un **point médian**. L'exercice de la section 1 l'illustre bien. La position du point de Fermat dans le cas d'un triangle isocèle ne dépend pas de la position du sommet opposé à la base (dès que l'angle au sommet est strictement inférieur à 120°). Le point médian est insensible aux valeurs extrêmes, contrairement au point moyen (barycentre). On est quand même d'accord que le point moyen (barycentre) a lui comme avantage d'être plus facile à calculer... Une médiane étant beaucoup plus difficile à calculer qu'une moyenne, on peut alors comprendre un peu mieux pourquoi la minimisation des points de Fermat est un problème difficile.

On a pu remarquer qu'il pouvait y avoir plusieurs points de Fermat (tout un segment). On peut donc dire soit que tout point de Fermat est un point médian, soit que le point médian est le point de Fermat dont l'abscisse est la plus petite. Etant donné que beaucoup d'entre-nous ne sommes pas d'accord sur la définition de la médiane d'une série statistique; ceci nous emmène donc à poser au choix les deux définitions suivantes:

Définition 2.1 Une médiane d'une série statistique $(x_1, \dots, x_n)$ muni des effectifs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un réel qui réalise le minimum de la fonction $x \mapsto \alpha_1|x - x_1| + \dots + \alpha_n|x - x_n|$.

Définition 2.2 La médiane d'une série statistique $(x_1, \dots, x_n)$ muni des effectifs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est le plus petit réel qui réalise le minimum de la fonction $x \mapsto \alpha_1|x - x_1| + \dots + \alpha_n|x - x_n|$.

Cette deuxième définition coïncide en fait avec celle qui dit que la médiane est la plus petite valeur de la série telle que 50% des valeurs de la série lui sont inférieures ou égales.

3 Etude de la fonction de Fermat dans le cas d'un triangle quelconque

Dans toute cette partie, A, B, C désigne trois points non alignés du plan, la fonction de Fermat associée est donc définie par $f(M) = MA + MB + MC$.

3.1 Caractérisation angulaire des points de Fermat

Lemme 3.1 Soit E le plan euclidien muni de sa norme euclidienne $\|\cdot\|$. Soit ϕ la fonction définie sur E par $\phi(\vec{u}) = \|\vec{u}\|$. ϕ est différentiable sur E sauf en 0. De plus son vecteur gradient noté $\nabla\phi$ est défini par $\nabla\phi(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

preuve: On choisit une base orthonormale de E . Si les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont (x, y) , alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale, on en déduit que l'application norme est différentiable sur E sauf en 0, comme composée de fonctions différentiables. De plus, avec un abus de notation, on a donc $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, et donc

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \text{ Donc } \nabla\phi(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

□

On en déduit directement le résultat suivant.

Corollaire 3.1 f est différentiable sur $\mathcal{P} \setminus \{A, B, C\}$ et on a

$$\nabla f(M) = \frac{\vec{MA}}{\|\vec{MA}\|} + \frac{\vec{MB}}{\|\vec{MB}\|} + \frac{\vec{MC}}{\|\vec{MC}\|}.$$

Proposition 3.1 *Caractérisation angulaire des points de Fermat*

Si P est un point de Fermat distinct des sommets de ABC , alors il voit les segments du triangle ABC sous un angle de 120° , c'est à dire $\widehat{APB} = \widehat{APC} = \widehat{BPC} = 120^\circ$.

preuve: Soit P , un point de Fermat distinct des sommets A, B et C . C'est donc un minimum de f sur l'ouvert $\mathcal{P} \setminus \{A, B, C\}$. La condition nécessaire d'extremum s'écrit donc $\nabla f(P) = \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|} + \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} + \frac{\vec{PC}}{\|\vec{PC}\|} = \vec{0}$. On note alors $\vec{u} = \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|}$, $\vec{v} = \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|}$ et $\vec{w} = \frac{\vec{PC}}{\|\vec{PC}\|}$. Ces trois vecteurs sont de norme 1. On a donc,

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \\ \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= 1 \\ 2 + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\vec{v}, \vec{w}) &= 1 \\ 2\cos(\vec{v}, \vec{w}) &= -1 \\ \cos(\vec{v}, \vec{w}) &= -\frac{1}{2} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &= \frac{2\pi}{3} [\pi]. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\widehat{BPC} = 120^\circ$. On fait de même pour les deux autres angles. □

3.2 Construction du point de Fermat comme une intersection d'arcs de cercles

Lemme 3.2 Soient U et V deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MV}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ est la réunion de deux arcs de cercle privés de leurs extrémités, construits selon le procédé suivant:

- on trace les points W et W' tels que UVW et UVW' soient des triangles équilatéraux
- on construit les cercles circonscrits à UVW et UVW' (on trace deux médiatrices de UVW et UVW')
- l'ensemble cherché est alors la réunion des deux arcs de cercle d'extrémités U et V privés de leurs extrémités.

preuve: L'ensemble des points M qui vérifie $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MV}) = \alpha [\pi]$ est un arc de cercle (on peut le démontrer à l'aide de nombres complexes). Ici, on a une égalité modulo 2π . Le mieux est de faire un schéma, puis d'utiliser le résultat suivant: la mesure d'un angle au centre est le double de la mesure d'un angle inscrit qui intercepte le même arc... $\square$

Corollaire 3.2 Sous réserve que le minimum n'est pas atteint aux sommets de ABC , il n'existe qu'un et un seul point de Fermat obtenu comme l'intersection de trois arcs de cercle.

preuve: Si P un minimum distinct des sommets de ABC , il voit les sommets avec un angle de 120° . Mais alors d'après le lemme précédent, il appartient à un arc de cercle d'extrémités A et B , et de même à un arc de cercle d'extrémités A et C . ces deux arcs se coupent en deux points au plus; l'un d'eux est A , mais P est distinct de A , donc P est nécessairement le deuxième point d'intersection de ces arcs. $\square$

3.3 Construction du point de Fermat comme une intersection de droites

Proposition 3.2 On note respectivement A', B' et C' les points tels que les triangles BCA', ACB' et ABC' soient des triangles équilatéraux construits à l'extérieur de ABC . Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point O qui vérifie la caractérisation angulaire des points de Steiner, c'est à dire, $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$.

De plus, si l'un des angles du triangle ABC est strictement supérieur à 120° , le point de concours O est à l'extérieur du triangle.

preuve: Ce problème de droites concourantes est parfois attribué à Torricelli. Je vous laisse faire la preuve, j'attends vos propositions.

Montrons la deuxième partie de la proposition. Supposons par exemple que $\widehat{A} > 120^\circ$. Comme $\widehat{BAC'} = 60^\circ$, $\widehat{C'AC} > 180^\circ$, donc le segment $[CC']$ privé de ses extrémités est extérieur à ABC . De même, on montre que le segment $[CC']$ privé de ses extrémités est extérieur à ABC , ce qui prouve que leur intersection O est à l'extérieur. $\square$

Le résultat suivant en découle directement.

Corollaire 3.3 Sous réserve que le minimum n'est pas atteint aux sommets de ABC , l'unique point de Fermat est obtenu comme intersection des droites $(AA'), (BB')$ et (CC') .

Corollaire 3.4 Si un des angles du triangle ABC est strictement supérieur à 120° , le minimum de la fonction de Fermat ne peut être atteint que sur les sommets.

preuve: Puisque le minimum n'est pas atteint à l'extérieur, le point critique n'est pas un minimum. Les seuls points restants, candidats pour être des minimums sont donc les sommets. $\square$

3.4 Etude de la fonction de Fermat sur les sommets

Tout d'abord, remarquons que si les trois angles du triangle sont aigus, alors les trois hauteurs du triangle sont intérieures.

Premier cas : supposons tout d'abord que tous les angles du triangle sont aigus. On considère alors la hauteur issue de A , elle coupe $[BC]$ en H . On a alors $f(H) = BC + AH$ et $f(B) = BC + AB$. Puisque $AH < AB$, on en déduit que $f(H) < f(B)$; donc le minimum ne peut être atteint sur le sommet B . Avec le même raisonnement (en changeant de hauteur), on montre donc que le minimum n'est pas atteint sur les sommets.

Deuxième cas : supposons qu'il y ait un angle obtus, par exemple au point A (cette fois-ci, il y a une hauteur extérieure au triangle, il faut donc procéder autrement). On trace alors la bissectrice de l'angle $\hat{A}$. On note $\alpha = \frac{\hat{A}}{2}$. L'objectif est d'évaluer la fonction de Fermat sur cette bissectrice. Soit M un point intérieur au triangle, sur la bissectrice. D'après la relation d'Al Kashi, on a $MB^2 = MA^2 - 2MA \cdot AB \cos \alpha + AB^2$ et $MC^2 = MA^2 - 2MA \cdot AC \cos \alpha + AC^2$. On munit la bissectrice d'un repère d'origine A , on note alors x l'abscisse du point M dans ce repère. On a donc $MB^2 = x^2 - 2x \cdot AB \cos \alpha + AB^2$ et $MC^2 = x^2 - 2x \cdot AC \cos \alpha + AC^2$. Si M est proche du point A , tout en étant sur la bissectrice, on a x proche de 0. Ainsi

$$\begin{aligned} MB &= \sqrt{x^2 - 2x \cdot AB \cos \alpha + AB^2} \\ &= AB \sqrt{1 - 2x \cos \alpha / AB + x^2 / AB^2} \\ &= AB \left(1 + 1/2 \left(-2x \cos \alpha / AB + o(x^2) \right) \right) \\ &= AB - x \cos \alpha + o(x^2) \end{aligned}$$

On montre de même que $MC = AC - x \cos \alpha + o(x^2)$. En additionnant, on a donc

$$\begin{aligned} f(M) &= x + AB + AC - 2x \cos \alpha + o(x^2) \\ &= AB + AC + x(1 - 2 \cos \alpha) + o(x^2) \\ &= f(A) + x(1 - 2 \cos \alpha) + o(x^2) \end{aligned}$$

Si $\alpha < 60^\circ$ (ie $\hat{A} < 120^\circ$), on a $1 - 2 \cos \alpha < 0$, donc $f(M) < f(A)$ pour M suffisamment proche de A , ce qui prouve que le minimum n'est pas atteint en A .

Conclusion:

- Si tous les angles du triangle sont strictement inférieurs à 120° , le minimum n'est pas atteint sur les sommets, donc le minimum est atteint au point de Fermat caractérisé au corollaire 3.3.
- Si l'un des angles est supérieur ou égal à 120° , le minimum est atteint en ce sommet.

4 Introduction aux problèmes de plus court chemin reliant des points

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points du plan. Parmi tous les chemins passant par $A_1, A_2, \dots, A_n$, en existe-il un ou plusieurs qui soi(en)t de **longueur minimale**? S'il(s) existe(nt), de tels chemins sont appelés chemins de **Steiner**.

Cette recherche de plus court chemin est dans le cas général, d'une très grande complexité; c'est un **problème NP complet**. Il existe des algorithmes qui donnent des solutions, mais le coût en

calcul est exponentiel.

Dans cette section, nous allons juste envisager le cas où les points sont les sommets d'un carré ou d'un rectangle.

En fait, je vous laisse chercher tout seul, j'attends vos propositions.

Juste une indication, pensez aux points de Fermat...