

Équation fonctionnelle et déterminant

Résumé

La détermination des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

s'effectue en deux temps. Par «traffics algébriques», on obtient successivement $f(0) = 0, f(n) = nf(1)$ pour $n \in \mathbb{Z}, f(r) = r$ pour $r \in \mathbb{Q}$, puis par passage à la limite, $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Les deux étapes sont de nature différente : la première est «mécanique» tandis que la seconde pourrait être qualifiée de «chimique», la continuité servant de catalyseur à la partie dense. Elles se résument par les propositions suivantes :

- un morphisme de groupes est entièrement déterminé par l'image de générateurs du groupe
- une application continue est entièrement déterminée par l'image d'une partie dense.

L'objet de ce texte est de mettre en lumière le parallèle remarquable existant entre les deux énoncés précédents. Le cadre choisi est l'étude des formes multiplicatives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire des fonctions f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le théorème principal affirme qu'elles s'expriment à l'aide du déterminant. En corollaire, nous obtenons une caractérisation fonctionnelle du déterminant. Pour mener à bien cette quête du générateur «atomique», qui nous conduira aux matrices de dilatations, nous utiliserons des outils divers tels que la généricité des matrices diagonalisables, les opérations élémentaires et la génération du groupe linéaire par transvections et dilatations.

Notations

Dans tout le texte, n est un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit i et j deux entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice obtenue à partir de I_n en ajoutant à la ligne i , λ fois la ligne j .
On dit que $T_{i,j}(\lambda)$ est une matrice de transvection.
- On note $D_i(\lambda)$ la matrice obtenue à partir de I_n en multipliant la ligne i par λ .
Lorsque λ est non nul, on dit que $D_i(\lambda)$ est une matrice de dilatation.
- On note $P_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de I_n en permutant les lignes i et j . On dit que $P_{i,j}$ est une matrice de transposition.

1 Applications multiplicatives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$

L'application déterminant n'est pas la seule forme multiplicative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple, le carré du déterminant est encore une forme multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, car la fonction carré $\phi : x \mapsto x^2$ est une forme multiplicative sur $\mathbb{K}$. Ceci se généralise facilement, en composant le déterminant par une forme multiplicative sur $\mathbb{K}$, on récupère une forme multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le théorème principal nous dit qu'on les obtient toutes ainsi :

Théorème 1 *Les formes multiplicatives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les fonctions composées du type $\phi \circ \det$ où $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ est multiplicative.*

Pour arriver à ce résultat, commençons par les constatations suivantes :

Proposition 2 *Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ multiplicative et non constante. Alors on a :*

- $f(0) = 0$ et $f(I_n) = 1$.
- f est constante sur les classes de similitude.
- si $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale, alors $f(\Delta) = f(D_1(\det \Delta))$.

Preuve :

- On a $f(0) = f(0 \times 0) = f(0)^2$ d'où $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 1$, alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $f(0) = f(M \times 0) = f(M)f(0)$ d'où $1 = f(M)$ et donc f est constante, ce qui n'est pas, donc $f(0) = 0$.
De même, $f(I_n) = f(I_n \times I_n) = f(I_n)^2$ d'où $f(I_n) \in \{0, 1\}$. Si $f(I_n) = 0$, alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $f(M) = f(M \times I_n) = f(M)f(I_n) = 0$ et donc f est constante, ce qui n'est pas, donc $f(I_n) = 1$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$f(PAP^{-1}) = f(P)f(A)f(P^{-1}) = f(A)f(P)f(P^{-1}) = f(A)f(PP^{-1}) = f(A)f(I_n) = f(A).$$

- Soit Δ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$. On a $\Delta = D_1(d_1) \times \dots \times D_n(d_n)$ et donc $f(\Delta) = f(D_1(d_1)) \times \dots \times f(D_n(d_n))$. Mais pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $D_i(\lambda)$ est semblable à la matrice $D_1(\lambda)$ (il suffit de permuter les vecteurs d'indice 1 et i de la base). Comme f est constante sur les classes de similitude, on a

$$\begin{aligned} f(\Delta) &= f(D_1(d_1)) \times f(D_2(d_2)) \times \dots \times f(D_n(d_n)) \\ &= f(D_1(d_1)) \times f(D_1(d_2)) \times \dots \times f(D_1(d_n)) \\ &= f(D_1(d_1) \times D_1(d_2) \times \dots \times D_1(d_n)) \\ &= f(D_1(d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n)) \\ &= f(D_1(\det \Delta)) \end{aligned}$$

■

Le dernier point démontré apporte un indice majeur, la valeur de f dépend du déterminant et des matrices de dilatation $D_1(\lambda)$.

Plus précisément, nous allons prouver dans les deux prochaines sections la proposition fondamentale suivante qui démontre le théorème 1.

Proposition 3 (Résultat fondamental) *Si $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est multiplicative, alors pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $f(M) = f(D_1(\det M))$.*

En effet, en posant $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\phi(z) = f(D_1(z))$, l'application f s'écrit $f = \phi \circ \det$ et on vérifie que ϕ est multiplicative, puisque pour z et z' dans $\mathbb{K}$, on a

$$\phi(z)\phi(z') = f(D_1(z))f(D_1(z')) = f(D_1(z)D_1(z')) = f(D_1(zz')) = \phi(zz').$$

2 Une preuve «chimique» à l'aide de générateurs topologiques

On se restreint ici au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Nous avons déjà prouvé que la relation fondamentale $f(M) = \phi(\det M)$ est vraie pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale, elle est donc aussi vraie pour toute matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (une matrice diagonalisable est semblable à une matrice diagonale). Comme l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ce résultat classique constitue le théorème 8 démontré en annexe), on peut étendre ce résultat à toutes les matrices grâce à l'hormone continuité. En effet, en supposant f continue, les fonctions continues¹ f et $\phi \circ \det$ coïncident sur $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elles coïncident donc sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier. Nous avons donc démontré

Proposition 4 *Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ multiplicative et continue. Alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $f(M) = f(D_1(\det M))$.*

Remarque : cette preuve est assez rapide. En contre-partie, on a utilisé un résultat de densité qui demande un certain travail et une hypothèse de continuité. Les matrices diagonalisables ont été utilisées comme des générateurs «topologiques».

1. La fonction déterminant est continue car polynomiale, donc $\phi \circ \det$ est continue comme composée de fonctions continues.

3 Une preuve «mécanique» à l'aide de générateurs algébriques

Nous allons maintenant donner une preuve complète de la proposition fondamentale 3 lorsque $\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque et donc sans hypothèse de continuité. Pour cela, nous allons utiliser les générateurs «algébriques» du groupe linéaire : transvections et dilatations (voir le théorème 9 en annexe). Nous allons donc montrer que l'égalité $f(M) = \phi(\det M)$ est vraie pour :

- les matrices non inversibles
- les matrices de transvections et les matrices de dilatations.

Le résultat s'en déduira alors par multiplicativité de façon «mécanique».

Nous allons auparavant démontrer que toutes les transvections distinctes de la matrice unité sont semblables.

Lemme 5 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul, la matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice $T_{1,2}(1)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont $T_{i,j}(\lambda)$ est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Comme $n \geq 2$, on peut considérer la base $\mathcal{B}'$ obtenue à partir $\mathcal{B}$ en supprimant les vecteurs e_i et e_j et en ajoutant en première et deuxième position les vecteurs λe_i et e_j et. La base $\mathcal{B}'$ est donc de la forme $\mathcal{B}' = (\lambda e_i, e_j, e_1, \dots)$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, $u(e_k) = e_k$ et $u(e_j) = e_j + \lambda e_i$, la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est donc la matrice diagonale par blocs

$$\text{diag} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_{n-2} \right) = T_{1,2}(1).$$

■

Passons à la preuve de la proposition fondamentale 3.

Preuve :

On suppose f non constante, l'autre cas étant acquis.

1. Commençons par prouver que f sépare les matrices inversibles des non inversibles, en montrant que si A est inversible $f(A) \neq 0$ et si A non inversible $f(A) = 0$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $f(A)f(A^{-1}) = f(AA^{-1}) = f(I_n) = 1$ donc $f(A) \neq 0$.

Si A est non inversible, son rang vaut $r < n$. Elle est ainsi équivalente à la matrice suivante N de rang r dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux d'une «surdiagonale» (deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang) :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe ainsi P et Q inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PNQ$. Comme N est triangulaire supérieure stricte, elle est nilpotente et on a $N^n = 0$. Ainsi $f(N)^n = f(N^n) = f(0) = 0$, ce qui donne $f(N) = 0$ et enfin $f(A) = f(P)f(N)f(Q) = 0$.

2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul, on a déjà vu que la matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est semblable à $D_1(\lambda)$, donc comme $\det D_i(\lambda) = \lambda$, on a

$$f(D_i(\lambda)) = f(D_1(\lambda)) = f(D_1(\det D_i(\lambda))) = \phi(\det D_i(\lambda)).$$

3. Démontrons que si T est une matrice de transvection alors $f(T) = 1$. Si $T = I_n$, on a bien $f(T) = f(I_n) = 1$. Supposons maintenant que $T = T_{i,j}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. On a $T_{1,2}(1)^2 = T_{1,2}(2)$ (ce qui est naturel si l'on raisonne par opérations élémentaires, puisque les deux opérations successives $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ sont équivalentes à $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$).

Si la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ est différente de 2, la matrice $T_{1,2}(2)$ est distincte de I_n et donc semblable à $T_{1,2}(1)$ d'après le lemme précédent. On a donc puisque f est constante sur les classes de similitude

$$f(T_{1,2}(1))^2 = f(T_{1,2}(1)^2) = f(T_{1,2}(2)) = f(T_{1,2}(1)).$$

Donc $f(T_{1,2}(1)) \in \{0, 1\}$ puis $f(T_{1,2}(1)) = 1$ car $T_{1,2}(1)$ est inversible.

Si la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ est 2, $T_{1,2}(2) = T_{1,2}(0) = I_n$, donc

$$f(T_{1,2}(1))^2 = f(T_{1,2}(1)^2) = f(T_{1,2}(2)) = f(I_n) = 1.$$

Donc $f(T_{1,2}(1)) \in \{-1, 1\}$, mais comme $-1 = 1$ dans un corps de caractéristique 2, on a encore $f(T_{1,2}(1)) = 1$.

On conclut donc que $f(T_{i,j}(\lambda)) = 1$ puisqu'elle est semblable à $T_{1,2}(1)$ si $\lambda \neq 0$.

Puisque le déterminant d'une matrice T de transvection vaut 1 (c'est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux valent 1), on a $f(D_1(\det(T))) = f(D_1(1)) = f(I_n) = 1 = f(T)$.

4. Conclusion : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A est non inversible, $f(A) = 0$ et $f(D_1(\det A)) = f(D_1(0)) = 0$ car $D_1(0)$ non inversible. Donc $f(A) = f(D_1(\det A))$.

Si A est inversible, d'après le théorème 9, A est un produit de matrices de transvections et de dilatations. Les fonctions multiplicatives f et $\phi \circ \det$ coïncident donc sur une partie génératrice de $GL_n(\mathbb{K})$, elles coïncident donc sur $GL_n(\mathbb{K})$ tout entier, ce qui achève la démonstration.

■

Corollaire 6 (Caractérisation fonctionnelle du déterminant) *L'application déterminant est la seule application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant :*

- pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
- pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1, $f(I_n + A) = 1 + \text{Tr}(A)$.

Preuve :

▷ Montrons tout d'abord que l'application $\det$ convient en prouvant le second point. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A . Le noyau de u est de dimension $n - 1$ via le théorème du rang, notons alors D une droite supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans $\mathbb{K}^n$. Posons B la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^n = \text{Ker } u \oplus D$. Les $n - 1$ premières colonnes de B sont nulles, ainsi son coefficient diagonal $b_{n,n}$ est égal à la trace de B , donc à la trace de H (deux matrices semblables ont même trace). Il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$ d'où $I_n + A = P(I_n + B)P^{-1}$. En passant au déterminant (deux matrices semblables ont même déterminant), il vient

$$\det(I_n + A) = \det(I_n + B) = 1 + b_{n,n} = 1 + \text{Tr}(A).$$

▷ Réciproquement si f vérifie les deux conditions, alors d'après le théorème principal, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $f(M) = f(D_1(\det M))$.

Si $\det M = 1$, alors $f(D_1(\det M)) = f(D_1(1)) = f(I_n) = 1$ donc $f(M) = \det M$.

Si $\det M \neq 1$, alors $\text{rg}((\det M - 1)E_{1,1}) = 1$ donc avec la deuxième condition, $f(D_1(\det M)) = f(I_n + (\det M - 1)E_{1,1}) = 1 + \text{Tr}((\det M - 1)E_{1,1}) = \det M$.

■

Remarque : Cette caractérisation fonctionnelle du déterminant peut-être obtenue sans utiliser la proposition fondamentale 3 mais avec les mêmes ingrédients. La preuve est laissée au lecteur sous forme d'exercice².

2.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une application vérifiant :

- pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
- pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1, $f(I_n + A) = 1 + \text{Tr}(A)$.

1. Démontrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(M) \neq 0$.
2. Déterminer $f(I_n)$. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $f(A) \neq 0$.
3. Calculer $f(T_{i,j}(\lambda))$, $f(D_i(\lambda))$ et $f(P_{i,j})$, en déduire que pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $f(A) = \det A$.
4. Soit $r \in \{0, \dots, n - 1\}$ et J_r la matrice canonique de rang r de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démontrer que $f(J_r) = 0$, en déduire que $f(A) = 0$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible. Conclure.

4 Pour finir, une troisième preuve

Pour terminer, nous proposons une dernière preuve de la proposition fondamentale 3 réalisant l'«union sacrée» entre générateurs «topologiques» les matrices diagonalisables et générateurs «algébriques» les matrices de transvection et dilatation.

En effet, la proposition suivante montre que les matrices diagonalisables sont aussi des générateurs algébriques et permettent donc aussi une preuve mécanique sans arguments de densité ou de continuité.

Proposition 7 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif distinct de $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices diagonalisables (et inversibles) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve : Nous savons déjà que les dilatations et les transvections engendrent $GL_n(\mathbb{K})$. Une matrice de dilatation est diagonale donc diagonalisable. Il suffit donc de montrer qu'une matrice de transvection T est produit de matrices diagonalisables. Si $T = I_n$, rien à faire. Sinon, d'après le lemme 5, T est semblable à la matrice $T_{1,2}(1) = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_{n-2}\right)$. Comme $\mathbb{K}$ est distinct de $\mathbb{F}_2$, il possède au moins 4 éléments et donc en particulier un élément x non nul distinct de 1. On a alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}}_C.$$

Les matrices B et C sont diagonalisables car ont deux valeurs propres distinctes, donc les matrices $\text{diag}(B, I_{n-2})$ et $\text{diag}(C, I_{n-2})$ sont aussi diagonalisables, ce qui achève la preuve car il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$T = PT_{1,2}(1)P^{-1} = P \text{diag}(B, I_{n-2}) \text{diag}(C, I_{n-2})P^{-1} = P \text{diag}(B, I_{n-2})P^{-1} \times P \text{diag}(C, I_{n-2})P^{-1}.$$

■

Remarque : Ce résultat est faux si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$. En effet, si une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et diagonalisable, sa seule valeur propre possible est 1, elle est donc semblable à I_n et donc égale à I_n . Dans ce cas une matrice inversible produit de matrices diagonalisables serait égale à I_n , ce qui aboutit à une contradiction puisque la matrice inversible $T_{1,2}(1)$ n'est pas égale à I_n .

Remarque : Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la décomposition polaire donne une autre preuve de la génération de $GL_n(\mathbb{C})$ par les matrices diagonalisables, sans utiliser les transvections et donc le théorème 9. En effet, une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire $A = HU$ avec H hermitienne définie positive et U unitaire donc diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5 Annexes

5.1 Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Théorème 8 L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Preuve : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette matrice est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres distinctes et $r_1, \dots, r_s$ les multiplicités associées. Il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} P^{-1} = PTP^{-1}.$$

Soit $\epsilon > 0$, on va commencer par «séparer» les valeurs propres distinctes. On peut trouver un petit rayon ρ avec $0 < \rho < \epsilon$, pour lequel les disques $D(\lambda_1, \rho), \dots, D(\lambda_s, \rho)$ sont distincts deux à deux ($D(a, \rho)$ désigne le disque fermé de centre a et de rayon ρ). Enfin, dans chacun de ces disques (qui sont des parties infinies de $\mathbb{C}$), donc pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, on peut choisir r_i complexes $z_{i,1}, \dots, z_{i,r_i}$ distincts deux à deux (on peut même expliciter : $z_{i,1} = \lambda_i + \frac{\rho}{1}, \dots, z_{i,r_i} = \lambda_i + \frac{\rho}{r_i}$). Les nombres complexes

$z_{1,1}, \dots, z_{1,r_1}, z_{2,1}, \dots, z_{2,r_2}, \dots, z_{s,1}, \dots, z_{s,r_s}$ sont donc par construction n nombres complexes deux à deux distincts. On considère alors la matrice

$$M_\epsilon = P \begin{pmatrix} z_{1,1} & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & z_{s,r_s} \end{pmatrix} P^{-1} = P T_\epsilon P^{-1}.$$

Cette matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

On choisit maintenant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la norme du sup des coefficients, définie par :

$$\forall M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|.$$

On démontre facilement que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$, (elle est presque sous-multiplicative) ainsi

$$\|M - M_\epsilon\| = \|P(T - T_\epsilon)P^{-1}\| \leq \underbrace{n \|P\| \|P^{-1}\|}_k \|T - T_\epsilon\| \leq k\epsilon,$$

Ceci achève la preuve, puisque si ϵ tend vers 0, la matrice M_ϵ tend vers M pour la norme $\|\cdot\|$ donc pour toute norme puisqu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. ■

5.2 Générateurs du groupe linéaire et opérations linéaires

On rappelle qu'appliquer les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftrightarrow L_j$ à une matrice A revient à multiplier A par la gauche par les matrices respectives $T_{i,j}(\lambda)$, $D_i(\lambda)$ et $P_{i,j}$.

Les opérations élémentaires étant inversibles, il en est de même de leur matrice associée, le tableau ci-dessous le résume.

opération	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftrightarrow L_j$
opération inverse	$L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$	$L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$	$L_i \leftrightarrow L_j$
matrice	$T_{i,j}(\lambda)$	$D_i(\lambda)$	$P_{i,j}$
inverse matrice	$T_{i,j}(-\lambda)$	$D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$	$P_{i,j}$

La méthode du pivot de Gauss permet à l'aide des opérations élémentaires de calculer l'inverse d'une matrice A , et donc de transformer la matrice A en la matrice unité I_n . Traitons un exemple pour illustrer la méthode avec la matrice inversible

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc}
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{equiv} \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \text{equiv} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \text{equiv} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \text{equiv} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \text{equiv} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \text{equiv} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{4} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \text{equiv} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \text{equiv} \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Comme la dernière opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$ est équivalente aux deux opérations élémentaires successives $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, on en déduit que

$$T_{1,3}(-1)T_{1,2}(-2)T_{2,3}(1)D_3(1/4)T_{3,2}(-3)P_{2,3}D_3(-1)D_2(-1)T_{3,1}(-1)T_{2,1}(-2)P_{1,2}A = I_3$$

puis en multipliant par les inverses des matrices «élémentaires», on obtient

$$A = P_{1,2}T_{2,1}(2)T_{3,1}(1)D_2(-1)D_3(-1)P_{2,3}T_{3,2}(3)D_3(4)T_{2,3}(-1)T_{1,2}(2)T_{1,3}(1).$$

Cette méthode se généralise à toute matrice inversible, une conséquence matricielle est que toute matrice inversible est le produit de matrices de transvections, de dilatations et de transpositions.

On peut améliorer ce résultat, en remarquant à l'aide du tableau suivant que l'opération élémentaire «permuter les lignes i et j » peut être obtenue à l'aide de quatre opérations élémentaires qui ne sont pas des permutations de lignes :

	valeur initiale	$L_j \leftarrow L_j - L_i$	$L_i \leftarrow L_i + L_j$	$L_j \leftarrow L_j - L_i$	$L_j \leftarrow -L_j$
L_i	a	a	b	b	b
L_j	b	$b - a$	$b - a$	$-a$	a

Matriciellement, cela s'écrit

$$P_{i,j} = D_j(-1)T_{j,i}(-1)T_{i,j}(1)T_{j,i}(-1).$$

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 9 *Toute matrice inversible peut s'écrire comme un produit de matrices de transvections et de dilatations.*

Remerciements

Je remercie Dominique Hoareau pour son aide à la rédaction et Bruno Harington pour sa relecture.

Références

- [1] C. G. Cullen and K. J. Gale, *A functional definition of the determinant*, The American Mathematical Monthly Vol. 72, No. 4 (Apr., 1965), pp. 403-406
- [2] Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 2*, Cassini (2006)
- [www] site internet de Marc Sage, www.normalesup.org/sage/