Autour des équations diophantiennes du type $x^n + y^n = nxy$

Arnaud de Saint Julien
desainta@yahoo.fr

1er septembre 2010

Cet article se propose de déterminer pour tout entier $n \geqslant 1$, les couples d'entiers (x, y) vérifiant l'équation

$$x^n + y^n = nxy \quad \text{(E)}.$$

Observons avant de démarrer que le cas $n = 3$ consiste à déterminer les points à coordonnées entières du **Folium de Descartes**.

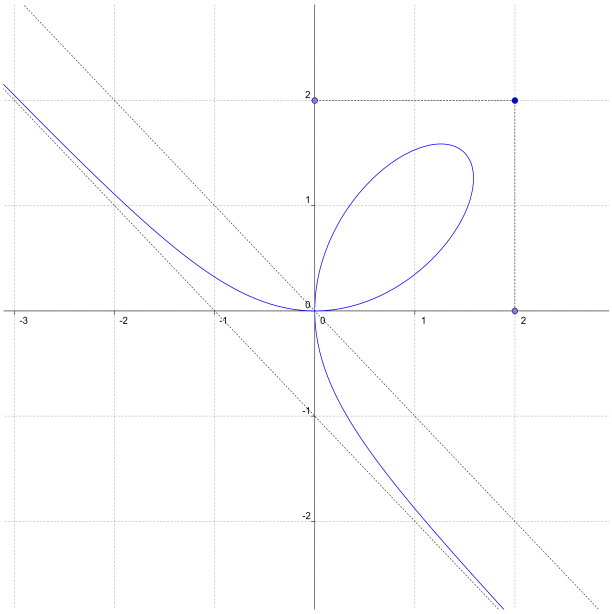

Figure 1 – la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$

1 Introduction et premiers résultats

On remarque déjà que si (x, y) est solution de (E), il en est de même de (y, x). De plus si (x, y) est solution avec $x = 0$, alors $y^n = 0$ d'où $y = 0$. Réciproquement $(0, 0)$ est bien solution. Ainsi $(0, 0)$ est le seul couple solution avec x ou y nul. Il reste donc à chercher les solutions dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

Commençons par les cas $n = 1$ et $n = 2$.

Proposition 1 (*Les cas $n = 1$ et $n = 2$*)

–

1. *Les solutions entières de l'équation $x + y = xy$ sont les couples $(0, 0)$ et $(2, 2)$.*

2. Les solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = 2xy$ sont les couples (k, k) avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : 1. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ vérifiant $x + y = xy$. On a $y = x(y - 1)$ donc $x \mid y$ et par symétrie, $y \mid x$ ce qui donne $x = \pm y$. Si $x = y$, (E) devient $2x = x^2$, d'où $x(x - 2) = 0$ d'où $x = 2$ et $y = 2$. Si $x = -y$, (E) devient $0 = x^2$ ce qui n'est pas. Réciproquement le couple $(2, 2)$ est bien solution, d'où le résultat.

2. Cela découle de l'identité

$$x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

■

2 Le cas des solutions positives

Nous allons maintenant traiter le cas $n \geqslant 3$. Si x et y sont des entiers positifs pas «trop petits», il semble que $x^n + y^n$ soit trop grand par rapport à nxy, ce qui laisse augurer que l'équation (E) n'admet pas beaucoup de solutions. C'est cette idée que l'on va essayer de mettre en place. Le lemme suivant va s'avérer décisif.

Lemme 2

Soit a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $a - b \geqslant 2$ et $n \geqslant 3$. On a

$$a^n - b^n \geqslant 2(n-1)ab \quad \text{et donc} \quad a^n + b^n \geqslant 2(n-1)ab.$$

Démonstration : On part de l'identité

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Pour $k \in \{1, \ldots, n-2\}$, $n - 1 - k \geqslant (n-1) - (n-2) = 1$, d'où $a^k b^{n-1-k} \geqslant ab$. De plus comme $n - 1 \geqslant 2$, on a aussi $a^{n-1} \geqslant a^2 \geqslant ab$ puisque $a \geqslant b$. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \geqslant (n-1)ab,$$

ce qui permet de conclure puisque $a - b \geqslant 2$. ■

Lemme 3

Si $n \geqslant 3$, l'équation $x^n + y^n = nxy$ n'admet aucune solution du type (k, k) avec $k \geqslant 1$.

Démonstration : Il s'agit de résoudre l'équation $2x^n = nx^2$. Comme $x \geqslant 1$, on a $2x^{n-2} = n$. Si $x = 1$, alors $2 = n$ ce qui est faux. Ainsi $x \geqslant 2$. De plus, pour $n \geqslant 3$, on a

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} = 1 + 2n > 2n.$$

En particulier $2^{n-1} > n$. Mais alors

$$2x^{n-2} \geqslant 2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1} > n.$$

x n'est donc pas solution. ■

Proposition 4

Soit $n \geqslant 3$. L'équation $x^n + y^n = nxy$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Démonstration : On peut supposer par exemple que $x \geqslant y$, quitte à permuter x et y.

– Si $x - y \geqslant 2$, d'après le lemme 2, on a $x^n + y^n \geqslant 2(n-1)xy$. De plus $2n - 2 > n \Leftrightarrow n > 2$. Comme $n \geqslant 3$, on a alors $x^n + y^n \geqslant 2(n-1)xy > nxy$, ce qui n'est pas.
– Si $x - y = 1$, alors on a $x^n + (x-1)^n = nx(x-1)$. Comme $x \mid x^n$ et $x \mid nx(x-1)$, alors $x \mid (x-1)^n$. Comme x et $x-1$ sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, x divise $x - 1$ donc $x = 1$ et $y = 0$ ce qui n'est pas.
– Si $x - y = 0$, on conclut par le lemme 3. ■

3 Le cas général

Nous allons traiter le cas général avec $n \geqslant 3$ et démontrer que notre équation n'admet aucune solution mise à part $(0, 0)$.

Théorème 5

Soit $n \geqslant 3$. L'équation $x^n + y^n = nxy$ admet une unique solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: le couple $(0, 0)$.

Démonstration : Soit (x, y) une solution dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

Si n est pair, les entiers x et y sont alors de même signe car $nxy = x^n + y^n > 0$. De plus le couple $(-x, -y)$ est encore solution, on peut donc supposer que (x, y) est un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on est ramené à la proposition précédente.

Supposons donc que n est impair. Les entiers x et y ne peuvent être tous les deux négatifs car sinon $x^n + y^n < 0$ tandis que $nxy > 0$. Le cas où x et y sont positifs étant déjà traité, on peut supposer par exemple que $x > 0$ et $y < 0$. On pose alors $y' = -y > 0$. Alors

$$x^n + y^n = nxy \Leftrightarrow x^n - y'^n = -nxy' \Leftrightarrow y'^n - x^n = nxy'.$$

Quitte à rebaptiser y' en y, on est amené à chercher les solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de l'équation $y^n - x^n = nxy$. On va utiliser la même technique que pour la proposition 4. Remarquons que $y \geqslant x$ et même que $y > x$ car si $x = y$ alors $nxy = 0$ ce qui n'est pas.

– Si $y - x \geqslant 2$, d'après le lemme 2, on a $y^n - x^n \geqslant \underbrace{2(n-1)}_{>n} xy > nxy$ (car $n > 2$) ce qui n'est pas.
– Si $y - x = 1$, alors on a $(1 + x)^n - x^n = nx(1 + x)$. Alors $1 + x$ divise x^n. Comme $x + 1$ et x sont premiers entre eux, on en déduit en appliquant le théorème de Gauss que $x + 1$ divise x puis que $x + 1 = 1$ et donc $x = 0$ ce qui n'est pas. ■

4 Pour finir, une preuve géométrique du cas $n = 3$

Nous avons représenté[1] ci-dessus la courbe d'équation cartésienne $x^3 + y^3 = 3xy$. On l'appelle le **folium de Descartes**. On peut ainsi observer qu'elle est constituée d'une boucle incluse dans la carré $[0, 2]^2$ et de deux branches infinis asymptotes à la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

Pour le prouver, nous paramétrons cette courbe par les droites passant par l'origine $(0, 0)$.

On obtient ainsi pour $t \neq 1$,

$$x(t) = \frac{3t}{t^3 + 1} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{3t^2}{t^3 + 1}.$$

On obtient sans difficultés le tableau de variations suivant.

Étudions la branche infinie au voisinage de $t = -1$. On a $\frac{y(t)}{x(t)} = t \to -1$ puis

$$y(t) + x(t) = \frac{3t + 3t^2}{t^3 + 1} = \frac{3t(t+1)}{(t+1)(t^2 - t + 1)} = \frac{3t}{t^2 - t + 1} \to -1.$$

1. On peut par exemple utiliser Maple et son instruction `implicitplot` (attention à charger le package `plots` auparavant).

Au voisinage de $t = -1$, la courbe est donc asymptote à la droite d'équation $x + y + 1 = 0$. De plus

$$y(t) + x(t) + 1 = \frac{3t + (t^2 - t + 1)}{(t^2 - t + 1)} = \frac{(t + 1)^2}{(t^2 - t + 1)} > 0$$

car $t^2 - t + 1 > 0$.

On a donc

$$\forall t \in] - \infty, -1[\cup] - 1, 0[, \quad -1 < x(t) + y(t) < 0,$$

ce qui prouve que pour pour tout $t \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$ les points de la courbe sont situés strictement à l'intérieur de la bande délimitée par les droites parallèles d'équation $x + y = 0$ et $x + y + 1 = 0$. Or il n'y aucun point à coordonnées entières à l'intérieur de cette bande.

Enfin, pour $t > 0$, on a $0 < x(t) < 2^{\frac{2}{3}} < 2$ et $0 < y(t) < 2^{\frac{2}{3}} < 2$, ce qui montre que la «boucle» est incluse dans le carré $[0, 2]^2$. Or dans ce carré, le seul point à coordonnées entières qui est sur la courbe est $(0, 0)$.