Cercles et quadrillage

Ce texte est inspiré d'un exercice posé par Roger Mansuy à ses élèves.

Nous disposons d'un cahier avec un quadrillage. On se demande si l'on peut tracer un cercle passant par au moins n points du quadrillage, où n est un entier arbitrairement grand. On munit le plan d'un repère orthonormé direct ayant pour origine le point O, on modélise ainsi le quadrillage comme l'ensemble des points du plan à coordonnées entières.

Résolution pour un «petit» nombre de points

Pour $n = 2$, il suffit de choisir deux points A et B du quadrillage et de prendre un point Ω sur la médiatrice de $[AB]$. Les points A et B étant équidistants de Ω, le cercle de centre Ω passant par A passe aussi par B.

Pour $n = 3$, il suffit de choisir trois points du quadrillage, et de tracer le cercle circonscrit au triangle formé par ces 3 points.

Pour $n = 4$, il suffit de considérer un carré formé par quatre points du quadrillage (ce qui est possible, par exemple les points de coordonnées $(0, 1); (1, 0); (0, -1); (-1, 0)$ qui sont équidistants de O) et de tracer son cercle circonscrit.

Pour $n = 5$, on pourrait se dire, qu'il suffit de tracer un hexagone régulier et de considérer son cercle circonscrit. Mais comment tracer un hexagone régulier dont les sommets sont sur le quadrillage ? C'est en fait impossible ! On peut démontrer que le seul polygone régulier du plan dont les sommets sont à coordonnées entières est le carré (on pourra consulter l'article [www]). Il faut donc trouver une autre piste.

Cas général

Nous allons traiter le cas général avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous allons utiliser les nombres complexes avec profit. Un point à coordonnées entières a une affixe z de la forme $z = x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{Z}$. On dit que c'est un entier de Gauss. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers de Gauss. On remarque alors que le produit de deux entiers de Gauss est encore un entier de Gauss, puisque si $z = a + ib$ et $z' = c + id$ sont dans $\mathbb{Z}[i]$, alors zz' est dans $\mathbb{Z}[i]$ puisque

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

On a donc trouver un moyen de fabriquer de nouveaux points du quadrillage : les points d'affixe $z, z^2, z^3, \ldots, z^n$ sont sur le quadrillage. Mais sont-ils sur un même cercle ? L'opération «multiplier par un nombre complexe z» revient à effectuer une rotation de centre O et d'angle $\arg z$ puis une homothétie de rapport $|z|$. Nos points tournent donc autour de O mais n'en sont pas à la même distance. On peut «ajuster» cette distance en considérant les nombres complexes $z|z|^{n-1}, z^2|z|^{n-2}, \ldots, z^n|z|^{n-n}$. Ces nombres complexes ont tous le même module qui vaut $|z|^n$, et sont donc l'affixe de points qui sont tous sur le cercle de centre O et de rayon $|z|$. C'est gagné ? Pas tout à fait, est-ce que nos nouveaux points points sont bien sur le quadrillage ? C'est à dire est-ce-que par exemple $z|z|^{n-1}$ est encore un entier de Gauss ? Et bien si $|z|$ est un entier la réponse est oui. Nous devons donc trouver un entier de Gauss dont le module est un entier ... Cela revient à trouver un triangle rectangle dont les trois longueurs sont des entiers. Grâce au fameux $3^2 + 4^2 = 5^2$ et à Pythagore, le nombre complexe $z = 3 + 4i$ convient avec $|z| = 5$.

Résumons la preuve : pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $z_k = (3 + 4i)^k 5^{n-k}$. On a $z_k \in \mathbb{Z}[i]$ et $|z_k| = 5^n$. Les points $M_1, \ldots, M_n$ d'affixe $z_1, \ldots, z_n$ sont donc des points du quadrillage sur le cercle de centre O et de rayon 5^n. Et bien ce n'est pas tout à fait terminé... Il faut s'assurer que les points $M_1, \ldots, M_n$ sont bien deux à deux distincts, pour avoir exactement n points. Supposons qu'il existe k et k' dans $\{1, \ldots, n\}$ avec $k > k'$ tel que $z_k = z'_k$. Alors on aurait

$$(3 + 4i)^{k-k'} = 5^{k-k'} \quad \text{et} \quad k - k' \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier le nombre complexe $(3 + 4i)^{k-k'}$ serait un entier de Gauss dont la partie réelle serait divisible par 5. Ceci n'est pas possible car pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, la partie réelle de $(3+4i)^p$ est congrue à 3 modulo 10. En effet, notons x_p et y_p les parties réelles et imaginaires de $(3 + 4i)^p$ et montrons par récurrence que «$x_p = 3 \mod 10$ et $y_p = 4 \mod 10$». C'est vrai pour $p = 1$. Supposons maintenant la propriété vraie au rang p. On a

$$(3+4i)^{p+1} = (3+4i)(3+4i)^p = (3+4i)(x_p + iy_p) = \underbrace{(3x_p - 4y_p)}_{x_{p+1}} + i\underbrace{(4x_p + 3y_p)}_{y_{p+1}}.$$

Ainsi $x_{p+1} = 3 \times 3 - 4 \times 4 \mod 10 = -7 \mod 10 = 3 \mod 10$ et $y_{p+1} = 4 \times 3 + 3 \times 4 \mod 10 = 24 \mod 10 = 4 \mod 10$. D'où l'hérédité, ce qui achève la preuve. Cette fois-ci c'est gagné !

Bibliographie

[www] article «polygones réguliers et quadrillages» sur le site `desaintar.free.fr`.