Approximations de π à l'aide d'arctangente

Le but cet exercice [1] est de comparer deux approximations de π faisant intervenir le développement en série entière de arctan.

Pour tout réel x et pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{et} \quad R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1 Développement en série entière de arctan

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel positif ou nul.
   (a) Démontrer que pour tout $t \in [0, x]$, on a
   $$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$
   En déduire que $\arctan x = S_n(x) + R_n(x)$.
   (b) Démontrer que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$.
2. En déduire que pour $x \in [0, 1]$ la suite $(S_n(x))_n$ converge et que l'on a :
   $$\arctan x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$
   Cette formule constitue le *développement en série entière* [2] de la fonction arctan.
3. En évaluant la formule précédente pour $x = 1$, déterminer une suite u qui converge vers π et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi - u_n| \leqslant \dfrac{4}{2n+3}$.
4. Déterminer un entier N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$, u_n est une valeur approchée de π à 10^{-6} près. La convergence de u vers π vous paraît-elle rapide ?

2 Formule de John Machin

1. Calculer avec soin $\tan\left(2 \arctan \frac{1}{5}\right)$ puis $\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right)$ (on donnera les résultats sous forme de rationnels).
2. Établir avec soin la formule de John Machin [3]
   $$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$
   En déduire 4 réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$ tels que la suite v de terme général $v_n = \lambda_1 S_n(a_1) - \lambda_2 S_n(a_2)$ converge vers π.
3. Déterminer un entier K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi - v_n| \leq \dfrac{K}{25^{n+1}}$.
4. En déduire un entier N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$, v_n est une valeur approchée de π à 10^{-6} près. Comparer avec l'approximation obtenue avec la suite u.

1. Les passionés et ou les futurs professeurs de Mathématiques pourront consulter à ce sujet le livre «Autour du nombre π» chez Hermann.
2. Vous verrez l'année prochaine que la plupart des fonctions usuelles admettent un développement en série entière. Par exemple, on a déjà montré en exercice, que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. C'est le développement en série entière de exp.
3. Cette méthode d'approximation de π utilisée par John Machin (1680-1752) permit à ce dernier de calculer «à la main» 100 décimales exactes de π en 1706.
Les approximations de π à l'aide de formules du type «Machin» permirent d'obtenir à l'aide d'ordinateurs un million de décimales en 1974 (J. Guilloud et M.Bouyer).
Aujourd'hui, les mathématiciens ont trouvé d'autres types de techniques encore plus performantes, par exemple avec des intégrales elliptiques qui leur permettent de calculer plusieurs milliards de décimales. On pourra consulter à ce sujet l'épreuve d'analyse du CAPES externe de 1995 ou le livre cité ci-dessus.

3 Machin Vs Maple

La fonction `evalf` de Maple donne l'écriture décimale d'un réel. La version étudiante de Maple est limitée et ne donne que les 100 premières décimales de π. Nous allons à l'aide de la formule de Machin et de Maple calculer les 200 premières décimales de π.

1. Donner un rationnel r tel que $|\pi - r| \leqslant 10^{-200}$.
2. Écrire des divisions euclidiennes qui permettent d'obtenir les quatre premières décimales de $\frac{9}{7}$.
3. Écrire une petite procédure Maple qui affiche les 200 premières décimales d'un nombre rationnel. Faire alors afficher les 200 premières décimales de π.

4 Comment construire d'autres formules du type de «Machin» ?

1. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et p, on a :
$$\arctan \frac{1}{n} = \arctan \frac{1}{n+p} + \arctan \frac{p}{n^2+np+1}.$$
2. Se faire plaisir et écrire des formules du type de Machin.