Feuille d'exercices sur l'intégration

1 Exercices de révision

Exercice 1 (Calculs divers)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \sin x$.
2. Démontrer que $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{8}$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose

$$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $B(p,q) = B(q,p)$.
2. Démontrer que l'on a $B(p,q) = \dfrac{q}{p+1}B(p+1,q-1)$. En déduire l'expression de $B(p,q)$.

Exercice 4 Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose $M = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. Démontrer que

$$\left|\int_{-1}^{1} (f(x^2) + xf(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 3M.$$

Exercice 5 (Intégrale de Wallis) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que l'on a aussi $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$ (cette expression n'est pas utile pour la suite).
2. *Formule explicite*
   (a) Donner la valeur de W_0 et W_1 puis montrer que pour $n \geqslant 1$, on a
   $$W_{n+1} = \frac{n}{n+1}W_{n-1}.$$
   (b) En déduire avec soin que pour $p \in \mathbb{N}$,
   $$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
   (c) Déterminer une formule similaire pour W_{2p+1}.

2 Exercices complémentaires, première vague

Exercice 6 Justifier l'existence de $\int_0^1 (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 Déterminer la limite des suites

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$ 2. $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 8 Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$J_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 9 (aire d'une ellipse)

1. Calculer à l'aide d'un changement de variable $\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire l'aire de l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Exercice 10 (Comparaison série-intégrale) Démontrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra remarquer que pour tout entier $k > 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 11 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 t\left|t-\frac{1}{2}\right| f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

A-t-on f nulle sur $[0,1]$?

Exercice 12 On pose pour $x > 0$,

$$\phi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et calculer $\phi'(x)$.
2. En déduire la valeur de $\phi(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 13 Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer qu'elle est impaire.

2. Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 14 Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer ϕ'.

Exercice 15 Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{n\pi} |\arcsin(\sin x)|\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16

1. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant 1-\cos t \leqslant \frac{t^2}{2}$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{t}$

Exercice 17 (Développement en série entière de cos)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus à l'ordre $2n+1$ avec $a = 0$.

2. En déduire que l'on a pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

3. Justifier que le résultat précédent reste vrai pour $x < 0$.

3 Deuxième vague

Exercice 18 Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^n \cos^2(\frac{k\pi}{n})$.

Exercice 19 Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

2. Démontrer que si $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, alors f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 20 On pose pour $x > 0$,
$$\phi(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que ϕ est définie sur $]0,+\infty[$, puis montrer que ϕ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. En déduire la monotonie de ϕ.

2. Démontrer que :
$$\forall x > 0,\ \mathrm{e}^{2x}\ln\frac{3}{2} \leqslant \phi(x) \leqslant \mathrm{e}^{3x}\ln\frac{3}{2}.$$
En déduire les limites de ϕ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 21 Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 22 Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{2\pi} \sqrt{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 23 Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ et ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que ϕ est $K - LIP$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| = \displaystyle\int_a^b |f|$ si et seulement si f est de signe constant (on pourra commencer par supposer que $\int_a^b f \geqslant 0$).

Exercice 25 (Lemme de lebesgue) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 26 Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que pour tout réel x, $f(x)g(x) \geqslant 4$. Démontrer que

$$\int_{-1}^2 f \int_{-1}^2 g \geqslant 36.$$

Exercice 27

1. Démontrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{\pi x} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{t^2}$.

Exercice 28 (Un opérateur) On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et on définit sur E l'application ϕ par $\phi(f) = g$ où g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E.

2. Démontrer que ϕ est injective mais n'est pas surjective.

Exercice 29 (Les dérivées intermédiaires sont bornées) Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées respectivement par M_0 et M_2. On fixe un réel x.

1. Démontrer à l'aide d'une formule de Taylor appliquée au point pivot x que :

$$\forall h > 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

2. En déduire que

$$\forall h > 0,\ |f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

3. En déduire que f' est bornée par $2\sqrt{M_0M_2}$.