Exercices sur limites et continuité

1 Pour démarrer

1.1 Continue or not ?

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^5 + 8x}{(e^x - 1)(x^4 + x^2 + 2)} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 4.$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(x + 5x^{2018})(e^x - \operatorname{ch} x)}{\sin^2 x}.$$

La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0 et en π ?

Exercice 3 Justifier la continuité de f définie par sur son ensemble de définition, puis étudier étudier ses éventuels prolongements par continuité aux bornes.

1. $f(x) = x^x$ 2. $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ 3. $f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln x - 1}\right)$

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ si $x \neq 0$ et si $f(0) = 1$.

1. Démontrer à l'aide d'un encadrement que f est continue en 0.
2. La fonction f est-elle continue en 2 et en $\frac{1}{2}$?

Exercice 5 Démontrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Une fonction nulle part continue) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Soit a un nombre irrationnel. Démontrer que f n'est pas continue en a (on pourra utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).
2. Étudier la continuité de f en a un rationnel. Conclure.

Exercice 7 Soit $f : [0, 1[\cup[2, 3] \to [0, 2]$ définie par $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Justifier que f est bijective et continue, puis tracer l'application réciproque f^{-1}. Est-elle continue sur $[0, 2]$?

1.2 Divers

Exercice 8 Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 2$ admet un axe de symétrie.

Exercice 9 Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^2$. En déduire l'existence d'un réel positif A tel que

$$\forall x \geqslant A,\ \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{1000x^2}.$$

Exercice 10 Démontrer à l'aide de suites que les fonctions suivantes n'ont pas de limites en a :

1. $f(x) = \cos x \cos \frac{1}{x}$ en $a = 0$ 2. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $a = +\infty$

Exercice 11 (Beaucoup de zéros ?) Les questions sont indépendantes.

1. Peut-on dire qu'une fonction qui ne s'annule pas est de signe constant ?
2. Déterminer les fonctions polynomiales s'annulant sur $\mathbb{Z}$.
3. Déterminer une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule exactement sur $\mathbb{Z}$.
4. Que dire d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule sur $\mathbb{Q}$?

1.3 Équations fonctionnelles

Exercice 12 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x)$.

Exercice 13 (une équation fonctionnelle) Śoit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. Application : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\frac{x+1}{2}) = f(x)$. Que dire de f ?
3. Application : déterminer $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x-1) = g(x)$.

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)).$$

1. Démontrer que f est paire, puis que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et pour tout réel x, on a $f(nx) = n^2 f(x)$.
2. Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r) = r^2 f(1)$.
3. On suppose de plus f continue. Déterminer f.

1.4 Utilisation du TVI

Exercice 15 Le polynôme $P = -2X^{2011} + 2010X^{201} - X^{11} + 7$ admet-il des racines réelles ?

Exercice 16 (Un théorème de point fixe) Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f admet un point fixe, *i.e.* un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$. Le point fixe est-il unique ?

Exercice 17 Démontrer que la fonction $\frac{1}{\mathrm{ch}}$ admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^+$. Admet-elle un point fixe dans $\mathbb{R}^-$?

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f|$ est constante. Démontrer que f est constante. Le résultat subsiste-t-il pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

Exercice 19 (Une fonction continue atteint les moyennes arithmétiques) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels de $[0, 1]$. Démontrer qu'il existe un réel $c \in [0, 1]$ tel que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

1.5 Utilisation du théorème de la bijection continue

Exercice 20 (Une suite définie implicitement) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose pour $x > 0$, $f_n(x) = x^n \ln x - 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n \ln x = 1$ admet une unique solution u_n dans $]0, +\infty[$.
2. Démontrer que la suite u est monotone (on pourra considérer $f_{n+1}(u_n)$) puis qu'elle converge et donner sa limite.

1.6 «Borne» «attitude»

Exercice 21 Préciser si les fonctions suivantes sont bornées.

1. La fonction $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{(\mathrm{e}^x - 1) \sin x}$ sur $]0, 1[$.
3. La fonction $h : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, puis sur $]0, 5]$.

Exercice 22 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 23 (Résultat important) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie en $+\infty$.

1. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
2. La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ?

3. Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^{2020}\sqrt{x}}{x^2+1}\mathrm{e}^{-2x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 24 (Fonction périodique) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est bornée. Et si f n'est pas continue ?
2. On suppose que f n'est pas constante. Démontrer à l'aide de suites que f n'admet pas de limite en $+\infty$.
3. Application : on pose $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, F le sous-espace vectoriel de E des fonctions 1-périodiques et nulles en 0, $G = \mathrm{Vect}\{\sin\}$ et H l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la somme $F + G + H$ est directe.

2 Compléments

Exercice 25 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

1. $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ 2. $P(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$ 3. $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$

Exercice 26 (Fonctions à pente minorée) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a > 0$ un réel tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geqslant a|x - y|.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que f est bijective.

1. Démontrer que f est injective, en déduire que f est strictement monotone.

On suppose f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant ax + f(0)$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer aussi la limite de f en $-\infty$ et en déduire que f bijective.
3. Traiter enfin le cas où f est strictement décroissante.

Exercice 27 (Rencontre avec une parabole) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = l \in [0, 1[.$$

1. Justifier qu'il existe $a > 0$ tel que $\frac{f(a)}{a^2} < 1$.
2. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(c) = c^2$.
3. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose que $l = 1$?

Exercice 28 (Fonctions continues à valeurs entières) Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lfloor f(x) \rfloor.$$

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Que dire de g ?
2. soit f une solution du problème.
   (a) Démontrer que f est une fonction affine, donc de la forme $x \mapsto ax + b$.
   (b) Démontrer que $a = 0$, puis conclure.

Exercice 29 On note u la suite définie par $u_{n+1} = \arctan u_n$ et $u_0 \in \mathbb{R}^+$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \arctan x - x$, en déduire que u converge, préciser sa limite.
2. Et si $u_0 < 0$?
3. Déterminer les fonctions $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\arctan x)$.

Exercice 30 (Calculs de limites, parfois délicates) Calculer les limites suivantes :

1. limite en $+\infty$ de $\exp(-\ln(\ln x))(\ln x)^{12}$
2. limite en $+\infty$ de $x^2 \mathrm{e}^{-x}(\ln x)^3$
3. limite en $+\infty$ de $x \ln(1 + x) - (x + 1) \ln x$
4. limite en $+\infty$ de $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$
5. limite en $+\infty$ de $\mathrm{e}^{\cos x} \sin \frac{1}{x}$
6. limite en $+\infty$ de $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (on pourra déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln(\ln x) - \ln x$).
7. limite en 1 de $\dfrac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln x}$ (on pourra poser $t = x - 1$).
8. limite en 0 de $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1 + x^2 + \sin^3 x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$ (on pourra déterminer un équivalent simple du numérateur).