Exercices sur le chapitre «Calcul binomial»

Un soupçon de dénombrement

Exercice 1 (La nuit du Volley) Le lycée organise un tournoi de Volley. La classe de MPSI désire y participer. Pour cela elle doit inscrire 10 noms d'élèves.

1. Combien d'équipes différentes la classe de MPSI peut-elle former ?
2. Finalement les règles ont changé. Pour former une équipe il faut 6 élèves et 3 professeurs de la classe. Combien d'équipes différentes la classe de MPSI peut-elle former ?

Exercice 2 (Un exo Posé par Cédric Villani) On appelle nombre palindrome un entier dont la lecture de ses chiffres est la même par la gauche ou par la droite. Par exemple, 45754 est un nombre palindrome. Combien existe-t-il de nombres palindromes à 351 chiffres ?

Exercice 3 (Encore du dénombrement) Les questions sont indépendantes :

1. Combien de triangles peut-on former avec 300 points distincts ?
2. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec l'alphabet latin ? Et si les lettres sont distinctes ?

Exercice 4 Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés ?

Exercice 5 On considère l'ensemble suivant à 12 éléments : $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. Dénombrer les parties de E qui possèdent 5 éléments.
2. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :

   (a) a et b (b) a mais pas b (c) ni a, ni b

Autour du binôme de Newton

Exercice 6 Si $x + \frac{1}{x} = 10$, combien vaut $x^3 + \frac{1}{x^3}$? Et si $x^3 + \frac{1}{x^3} = -2$, combien vaut $x + \frac{1}{x}$?

Exercice 7 Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} 3^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k}.$$

Exercice 8 Calculer la somme

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} \binom{j}{i}$$

Exercice 9 On pose $S = \sum_{k=20}^{50} \binom{k}{3}$. Calculer $\binom{20}{4} + S$. En déduire S.

Exercice 10 Soit f la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + 3x^2)^{15}$. Déterminer le degré de f ainsi que son terme de degré 22.

Exercice 11 (Une technique classique) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ en dérivant de deux façons différentes la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$.

2. Calculer avec une technique similaire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

3. Calculer aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ (on pourra intégrer entre 0 et 1).

Exercice 12 (Calcul de sommes)

1. Démontrer que pour tous entiers n et p vérifiant $0 < p \leqslant n$, on a
$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$
Vérifier que le résultat reste vrai pour n et p entiers relatifs quelconques.

2. En déduire les sommes suivantes :
(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}k\binom{n}{k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$

Exercice 13 (Avec un changement de variable) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$. Effectuer le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 14 (Somme des éléments pairs d'une ligne du triangle de Pascal) Le but de l'exercice est de calculer les sommes $S_0 = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} \binom{n}{2k}$ et $S_1 = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}$.

1. Exprimer $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ en fonction de S_0 et S_1.

2. En déduire S_0 et S_1.

Exercice 15 (Somme des éléments d'une colonne du triangle de Pascal) Soit $a \leqslant b$ des entiers et p un entier. Démontrer par récurrence sur l'entier b la formule suivante :
$$\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{p} = \binom{b+1}{p+1} - \binom{a}{p+1}.$$

Exercice 16 (Coefficient maximal d'une ligne du triangle de Pascal) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que $4^n \geqslant \binom{2n}{n}$.

2. Démontrer que la suite $k \mapsto \binom{2n}{k}$ est croissante sur $[\![0, n]\!]$. En déduire que :
$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \ \binom{2n}{n} \geqslant \binom{2n}{k}.$$

3. En déduire l'encadrement :
$$\frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n.$$