**Devoir surveillé de MATHÉMATIQUES n°9**
**mercredi 7 mai 2025**

*Durée de l'épreuve : 1 heure 45*
*Professeur : M. de Saint Julien*
*Les calculatrices sont interdites.*
*Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

---

**Exercice 1 (Questions de cours)**

**1.** Démontrer que pour toutes matrices $U$ et $V$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{Tr}(UV) = \operatorname{Tr}(VU)$.

**2.** En déduire que deux matrices semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 2** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On rappelle que si $v$ est un endomorphisme, la notation $v^2$ désigne l'endomorphisme $v \circ v$.

**1.** Déterminer le rang de $A - 3I_3$, en déduire un vecteur $a \in \mathbb{K}^3$ tel que $\operatorname{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(a)$.

**2.** Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.

**3.** Les espaces $\operatorname{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ ?

**4.** Écrire la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $(u - 2\,\mathrm{id})^2$, en déduire $\dim \operatorname{Ker}((u - 2\,\mathrm{id})^2)$.

**5.** En déduire que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}\left((u - 2\,\mathrm{id})^2\right)$ (on pourra utiliser une équation cartésienne de $\operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})^2$).

**6.** On pose $v = u - 2\,\mathrm{id}$. Déterminer un vecteur $b$ de $\operatorname{Ker} v^2$ qui n'est pas dans $\operatorname{Ker} v$, puis démontrer que la famille $(b, v(b))$ est une base de $\operatorname{Ker} v^2$.

**7.** En déduire que $\mathcal{B}' = (a, b, v(b))$ est une base de $\mathbb{K}^3$, écrire la matrice $A'$ de $u$ dans cette base.

**8.** On pose $B = \operatorname{diag}(1, 2, 3)$. Les matrices $A$ et $B$ sont-elles semblables ? Sont-elles équivalentes ?

**9.** La matrice $A$ est-elle semblable à la matrice $C = \operatorname{diag}(3, 2, 2)$ ?

**Exercice 3 (Endomorphisme localement nilpotent)** Soit $f$ un endomorphisme de $E$ avec $\dim E = n$. On suppose que $f$ est localement nilpotent, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N},\ f^p(x) = 0.$$

**1.** Démontrer que $f$ est nilpotent.

**2.** Le résultat persiste-t-il si $E$ est de dimension infinie ?

**Fin de l'énoncé** [1]

1. **Bonus :** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $M$ est la somme de deux matrices inversibles.