Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Devoir surveillé de MATHÉMATIQUES n°8
Samedi 5 avril 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (4x - y + 5z, -2x - y - z, -4x + y - 5z).$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

3. Démontrer que $\operatorname{Im} f$ est égal à P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + z = 0$.

4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$? Donner un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (Autour du théorème des accroissements finis)

1. Énoncer correctement le théorème des accroissements finis sur un intervalle $[a, b]$, puis faire un dessin et donner une interprétation graphique en utilisant le mot «parallèle».

2. On note f la fonction définie par $f(t) = \arctan t$. Soit $x > 0$, appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ et en déduire que :

$$\forall x > 0, \frac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x.$$

Exercice 3 (Indice de nilpotence) Dans tout l'exercice, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$ (on rappelle que f^p désigne l'endomorphisme $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ termes}}$).

On appelle indice de nilpotence de f le plus petit entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^r = 0$.

1. Justifier que l'endomorphisme «dérivée troisième» de $\mathbb{K}_{22}[X]$ qui à un polynôme P de $\mathbb{K}_{22}[X]$ associe le polynôme $P^{(3)}$ est nilpotent et donner son indice de nilpotence.

On suppose en plus que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme nilpotent de E non nul d'indice r.

2. On fixe un vecteur $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$. Démontrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est une famille libre de E. Comparer ainsi r et $\dim E$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui vérifie $AX = 0$ pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Démontrer par du calcul matriciel que $A = 0$.

4. En déduire, en considérant un certain endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, alors $N^n = 0$.

5. Application : démontrer que la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

n'admet pas de racines carrées, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $R^2 = N$.

II Problème d'analyse

- Si f est une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ avec $a < b$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a, b]$, deux à deux distincts.

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

1 Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0, n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X).$$

1. Donner sans justifier la valeur de $l_i(x_j)$ pour tout i et j dans $[\![0, n]\!]$. En déduire que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

2 Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.

On note $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i).$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a,b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a,b[, \quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x).$$

2. Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbb{N}^*$, démontrer par récurrence que si $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

3. Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a,b]$ une application F par :

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t).$$

4. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

5. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathcal{P}_x$ est vraie.

6. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$, en déduire que :

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

7. Dans cette question uniquement $[a,b] = [-1,1]$, on prend f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Déterminer les nombres $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\| f^{(2k)} \right\|_\infty \geqslant (2k)!.$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

8. On revient au cas général : démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$. On dit que P est un polynôme interpolateur de Hermite de f aux points x_i.

Fin de l'énoncé[1]

1. **Bonus :** soit a et b des réels avec a différent de 0 et 1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout réel x, $f(f(x)) = ax + b$.