Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Devoir surveillé de MATHÉMATIQUES n°7
Samedi 15 mars 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Algèbre

Exercice 1 On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x + 2y + 3z = 0\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base de F.

3. L'ensemble $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad xyz = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 (Somme de projecteurs) Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$.

1. Démontrer que $p + q$ est un projecteur.

2. Démontrer que $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

3. Démontrer que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

4. Dans cette question uniquement, on prend $E = \mathbb{R}^2$ et on note (i, j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose Δ la droite d'équation $y = x$.

- **(a)** Démontrer que les droites $\operatorname{Vect}(i)$ et Δ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
- **(b)** On note q la projection sur la droite des abscisses $\operatorname{Vect}\{i\}$, parallèlement à la droite Δ. Déduire de la question précédente, les coordonnées de $q(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- **(c)** On note p la projection orthogonale sur la droite des ordonnées $\operatorname{Vect}\{j\}$. L'endomorphisme $p + q$ est-il un projecteur ?

II Analyse

Exercice 3 (Savez-vous calculer des DL ?) Les questions sont indépendantes.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\mathrm{e}^x \cos x$.

2. Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^4 + x^{2020}}{\sin^2 x - x^2}$$

3. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x + \operatorname{sh} x}.$$

(a) Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

(b) En déduire que f se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser l'allure de la courbe au voisinage de 0 (position de la courbe par rapport à sa tangente)

.

Exercice 4

1. Démontrer à l'aide de suites que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. On note f la fonction «serpent» définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(a) Démontrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

(b) Démontrer que f n'est pas de classe C^1 en 0.

III Pour terminer

Exercice 5 On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n et g_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \cos^n(x).$$

1. Démontrer par récurrence que la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une famille libre de E (indication : si $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{p=0}^{n+1} a_p \cos px = 0$, montrer que $\sum_{p=0}^{n+1} p^2 a_p \cos px = 0$ puis que $\sum_{p=0}^{n}((n+1)^2 - p^2)a_p \cos px = 0$).

2. Démontrer que la famille $(g_0, g_1, ..., g_n)$ est libre.

Exercice 6 (Fonction coercive) Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $|x| > B$, on a $f(x) > f(a)$.

2. En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

3. Application : démontrer qu'une fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non constante de degré pair n'est pas surjective.

4. En déduire les fonctions polynomiales $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjectives.

Fin de l'énoncé[1]

1. **Bonus :** soit a et b des réels avec a différent de 0 et 1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout réel x, $f(f(x)) = ax + b$.