

**Devoir surveillé de MATHÉMATIQUES n°6**  
**Samedi 1 février 2025***Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00**Professeur : M. de Saint Julien**Les calculatrices sont interdites.**Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

## I Exercices

**Exercice 1 (Puissances  $n$ -ièmes d'une matrice)** On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On pose  $N = A - 2I_2$ . Calculer  $N^2$ , en déduire une expression de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme  $X^n$  par le polynôme  $P = X^2 - 4X + 4$ .
3. En déduire une autre méthode de calcul de  $A^n$ .

**Exercice 2 (Matrices triangulaires strictes Vs Matrices nilpotentes)** On rappelle qu'une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente s'il existe un entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^p = 0$ .

1. On pose  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Justifier que  $Q$  est inversible et donner son inverse.
2. Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  nilpotente et  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible. Démontrer que  $PNP^{-1}$  est nilpotente.
3. En déduire un exemple de matrice nilpotente  $M$  en taille 2 qui n'est pas triangulaire.

**Exercice 3 (Questions en vrac)**

1. Donner la décomposition en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$  de  $P = X^3 + 2X + 3$ .
2. Déterminer  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré 5 sachant que 1 est racine de  $P$ , que  $i$  est racine double de  $P$  et que  $P(2) = 100$ .

## II Problème : calcul de zeta de deux

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite  $(s_n)_n$  définie pour  $n \geq 1$  par :

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

On note  $\cotan$  la fonction définie sur  $]0, \pi[$  par

$$\cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Si  $x \in ]0, \pi[$ , on note aussi  $\cotan^2(x) = (\cotan(x))^2$ .

### I. Étude préliminaire d'un polynôme

Soit  $n \geq 2$  un entier. On pose  $P = (X + 1)^n - (X - 1)^n$  et

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \gamma_k = -i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

1. Démontrer que la fonction  $\cotan$  est strictement monotone sur  $]0, \pi[$ .
2. Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1} = \gamma_k.$$

En déduire que les racines complexes de  $P$  sont les nombres  $\gamma_k$  pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

3. Déterminer le degré de  $P$  et préciser son coefficient dominant.
4. En déduire la décomposition de  $P$  en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{C}$ .

On considère les deux fonctions symétriques élémentaires suivantes :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leq p < q \leq n-1} \gamma_p \gamma_q$$

qui sont respectivement la somme des racines de  $P$  et la somme des produits de 2 racines distinctes de  $P$  (sans répétition).

5. À l'aide des relations coefficients/racines, donner la valeur de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .
6. Déterminer une relation entre  $\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^2$  et  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

7. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cotan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

## II. Application

Soit  $p \geq 1$  un entier.

8. Démontrer par un argument de convexité que pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\tan x \geq x$ .

9. En déduire que pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a :

$$\cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan^2(x).$$

10. Vérifier que  $\forall x \in ]0, \pi[$ ,  $\cotan(\pi - x) = -\cotan(x)$ , en déduire que

$$\sum_{k=1}^p \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

11. Déduire des résultats précédents la limite de la suite  $(s_n)$  définie par  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .