Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

CONCOURS BLANC n°1 épreuve BIS
MATHÉMATIQUES
jeudi 9 janvier 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 (Point fixe d'une fonction) Si f est une fonction réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle point fixe de f tout réel a de A tel que $f(a) = a$.

1. Déterminer les points fixes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Démontrer que f admet un point fixe. Est-il unique ?

3. La fonction exp admet-elle un point fixe dans $\mathbb{R}$? Justifier.

4. On note u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \exp(u_n)$. La suite u est-elle convergente ? Justifier votre réponse, puis déterminer sa limite.

Exercice 2 On note $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Déterminer le ou les antécédents éventuels du nombre -1 par f. L'application f est-elle injective ?

2. Démontrer que f est surjective.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit sous forme algébrique $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer l'écriture algébrique de $f(z)$, en déduire que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad z \in \mathbb{U}).$$

4. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

II Problème : une introduction aux séries

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels, on appelle **série** de terme général u_n, la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ cette série au lieu de $(S_n)_{n\geqslant 0}$. On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa limite, on dit que c'est la somme de la série :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Donner la nature d'une série, c'est indiquer si elle converge ou non. Ce problème propose une introduction à la notion de séries.

1. *Deux exemples* :

(a) Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \dfrac{1}{3^n}$. Calculer S_n puis déterminer sa limite. En déduire la nature (c'est à dire convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

(b) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln(n+1) - \ln n$. Calculer S_n puis déterminer sa limite. En déduire la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

2. *Condition nécessaire de convergence* :

(a) Démontrer que si la **série** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la **suite** (u_n) converge vers 0.

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(c) démontrer en utilisant un exemple précédent que si une suite (u_n) tend vers 0, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas nécessairement.

3. *Séries de Riemann* :

Soit α un réel. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

(a) Justifier que pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(b) On suppose désormais jusqu'à la fin de cette partie que $\alpha > 0$. Calculer pour $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et déterminer sa limite (on discutera selon la valeur de α).

(c) Démontrer que
$$I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

(d) Déduire **avec soin** de tous les résultats précédents la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ (on discutera selon la valeur de α).

4. *Critère pour des séries alternées* :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

(a) Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge (on pourra considérer les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1})).

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(c) On note S la somme de la série précédente, c'est-à-dire $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Justifier que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S_{2n} - S| \leqslant \frac{1}{4n+3},$$
en déduire un entier N tel que $|S_{2N} - S| \leqslant 10^{-3}$.

5. *Un critère de D'Alembert* : soit u une suite de termes strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers un certain réel $l > 1$.

(a) Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$.

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

III Pour terminer

Exercice 3 (Nombres de Liouville) Un nombre complexe a est dit algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers tel que $P(a) = 0$. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant. On peut si besoin noter $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers. Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe des nombres transcendants.

1. Justifier que les nombres $\sqrt{2}$ et $j = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ sont algébriques.

La série $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ converge (inutile de le démontrer), on note alors x sa somme que l'on appelle nombre de Liouville :
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}.$$

Nous allons démontrer que le nombre x est transcendant, résultat démontré par Liouville en 1874.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant k$. Démontrer alors que :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

3. Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré $m \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$ une racine de P. Déduire du résultat précédent qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ qui n'est pas racine de P et vérifie $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant 1$, on a :

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{K}{q^m}.$$

On pourra utiliser librement le résultat suivant : une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est nécessairement bornée sur ce segment.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x - s_n| \leqslant \frac{1}{10^{n \times n!}}.$$

5. Conclure que le nombre x est transcendant.

Fin de l'énoncé [1]

1. **Bonus :** soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$.