



Année scolaire 2024-2025

MPSI

CONCOURS BLANC n°1  
MATHÉMATIQUES  
jeudi 9 janvier 2025

*Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h*

*Professeur : M. de Saint Julien*

*Les calculatrices sont interdites.*

*Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

## I Exercices

**Exercice 1 (Point fixe d'une fonction)** Si  $f$  est une fonction réelle définie sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , on appelle point fixe de  $f$  tout réel  $a$  de  $A$  tel que  $f(a) = a$ .

1. Déterminer les points fixes de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .
2. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$ . Démontrer que  $f$  admet un point fixe. Est-il unique ?
3. La fonction  $\exp$  admet-elle un point fixe dans  $\mathbb{R}$  ? Justifier.
4. On note  $u$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \exp(u_n)$ . La suite  $u$  est-elle convergente ? Justifier votre réponse, puis déterminer sa limite.

**Exercice 2** On note  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On rappelle que  $\mathbb{U}$  désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Déterminer le ou les antécédents éventuels du nombre  $-1$  par  $f$ . L'application  $f$  est-elle injective ?
2. Démontrer que  $f$  est surjective.
3. Soit  $z \in \mathbb{C}$  que l'on écrit sous forme algébrique  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . Déterminer l'écriture algébrique de  $f(z)$ , en déduire que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U}).$$

4. Déterminer  $f(\mathbb{U})$ .

## II Problème : une introduction aux séries

Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite de nombres réels, on appelle **série** de terme général  $u_n$ , la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On note  $\sum_{n \geq 0} u_n$  cette série au lieu de  $(S_n)_{n \geq 0}$ . On dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  **converge** lorsque la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge. Dans ce cas, on note  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  sa limite, on dit que c'est la somme de la série :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Si la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  diverge, on dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge.

Donner la nature d'une série, c'est indiquer si elle converge ou non. Ce problème propose une introduction à la notion de séries.

1. *Deux exemples :*

- (a) Pour  $n \geq 0$ , on pose  $u_n = \frac{1}{3^n}$ . Calculer  $S_n$  puis déterminer sa limite. En déduire la nature (c'est à dire convergente ou divergente) de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .
- (b) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \ln(n+1) - \ln n$ . Calculer  $S_n$  puis déterminer sa limite. En déduire la nature (convergente ou divergente) de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

2. *Condition nécessaire de convergence :*

- (a) Démontrer que si la **série**  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge, alors la **suite**  $(u_n)$  converge vers 0 (on pourra simplifier  $S_n - S_{n-1}$ ).
- (b) En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .
- (c) Réciproque fautive : démontrer en utilisant un exemple précédent que si une suite  $(u_n)$  tend vers 0, la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne converge pas nécessairement.

3. *Séries de Riemann :*

Soit  $\alpha$  un réel. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  et donc  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ .

- (a) Déterminer la monotonie de la suite  $(S_n)$ .
- (b) Justifier que pour  $\alpha \leq 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  diverge.
- (c) On suppose désormais jusqu'à la fin de cette partie que  $\alpha > 0$ . Calculer pour  $n \geq 1$ ,  $I_n = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$  et déterminer sa limite (on discutera selon la valeur de  $\alpha$ ).

(d) Montrer que pour tout  $k \geq 1$ , on a  $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ . En déduire un encadrement de  $S_n$  à l'aide de  $I_n$  et de  $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ .

(e) Déduire **avec soin** de tous les résultats précédents la nature de la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  (on discutera selon la valeur de  $\alpha$ ).

4. Critère pour des séries alternées :

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante qui tend vers 0. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ .

(a) Démontrer que la suite  $(S_{2n})_n$  est décroissante.

(b) Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  converge (on pourra considérer les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$ ).

(c) Application : déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

(d) On note  $S$  la somme de la série précédente, c'est-à-dire  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ . Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |S_{2n} - S| \leq \frac{1}{4n+3},$$

en déduire un entier  $N$  tel que  $|S_{2N} - S| \leq 10^{-3}$ .

5. Un critère de D'Alembert : soit  $u$  une suite de termes strictement positifs telle que la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 0}$  converge vers un certain réel  $l > 1$ .

(a) Démontrer qu'il existe un entier  $n_0$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$ .

(b) En déduire la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

### III Pour terminer

**Exercice 3** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par  $f_n(x) = \sin^{n+1}(x)$ .

1. Déterminer la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

2. Justifier que  $f_n$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , puis montrer que la dérivée  $f'_n$  admet un maximum en  $x = \arctan \sqrt{n}$ . On note alors  $M_n$  la valeur maximale de  $f'_n$ .

3. Déterminer une forme simple de  $\cos(\arctan t)$  et  $\sin(\arctan t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$M_n = \sqrt{\frac{n+1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}}.$$

Donner enfin un équivalent simple de  $M_n$  pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$ .