



Année scolaire 2024-2025

MPSI

Devoir surveillé de MATHÉMATIQUES n°3
Samedi 16 novembre 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00

Professeur : M. de Saint Julien

Les calculatrices sont interdites.

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices sur les nombres complexes

Exercice 1 On pose $Z = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2})}{1 - i}$.

1. Donner l'écriture algébrique de Z .
2. Donner une écriture exponentielle de Z .
3. Dédire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 2 (Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{5})$) On pose $S = \sum_{k=0}^4 e^{i\frac{2k\pi}{5}}$.

1. Démontrer que $S = 0$.
2. Déterminer un réel a tel que $S = 1 + a \cos(\frac{2\pi}{5}) + a \cos(\frac{4\pi}{5})$.
3. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est une racine du polynôme $P(X) = 4X^2 + 2X - 1$, puis donner une valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

L'exercice suivant est plus difficile et peut être traité après le problème d'intégration.

Exercice 3 On pose

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}.$$

1. Soit z et z' dans G . démontrer que $zz' \in G$.
2. Soit z et z' dans G . A-t-on $z + z' \in G$?
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$z \in G \iff \exists r \in \mathbb{Q}, z = e^{ir\pi}.$$

II Un Problème

Exercice 4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx.$$

1. Déterminer un réel $K \in [0, 1[$ tel que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}], \sin x \leq K$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3} K^n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

3. Déterminer la monotonie de la suite (S_n) , puis démontrer qu'elle est convergente. On note S sa limite.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x(1 - \sin x)} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1 - \sin x)} dx.$$

5. En déduire que $S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x(1 - \sin x)}$.

6. Démontrer que $S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(u-1)^2(u+1)}$.

7. Déterminer des réels a, b et c tels que :

$$\forall u \in [0, 1[, \quad \frac{1}{(u-1)^2(u+1)} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u-1)^2} + \frac{c}{u+1}.$$

On pourra poser $F(u) = \frac{1}{(u-1)^2(u+1)}$, calculer en premier le nombre c , puis calculer b en évaluant de deux façons différentes la quantité $(u-1)^2 F(u)$...

8. En déduire une primitive sur $[0, 1[$ de $u \mapsto \frac{1}{(u-1)^2(u+1)}$ (on donnera la réponse en fonction des réels a, b et c).

On peut ainsi avoir la valeur exacte de S (calcul non demandé).

III Pour terminer

Exercice 5 On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

1. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
2. En déduire la valeur de I_n que l'on écrira à l'aide de factorielles et de puissances de deux.
3. En déduire la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) dt.$$

IV A ne traiter que si tout le reste est terminé

Exercice 6

1. Soit $h \in C([a, b], \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $h(x) \geq 0$ et telle que $\int_a^b h(t) dt = 0$.
Démontrer avec soin que pour tout $x \in [a, b]$, $h(x) = 0$ (on pourra considérer la fonction H définie par $H(x) = \int_a^x h(t) dt$).
2. Déterminer toutes les fonctions $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telles que :

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$