Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Devoir surveillé de MATHÉMATIQUES n°4
Samedi 14 décembre 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x$.

Exercice 2 Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + 3.$$

Exercice 3 Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Démontrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

2. La réciproque est-elle vraie ?

3. Démontrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 4 On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x-3)^2 + 1 + y^2$.

1. L'application f est-elle injective, surjective ?

2. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

3. Dessiner $f^{-1}(\{5\})$.

Exercice 5 (un vrai-faux) Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Si une suite converge vers 1, à partir d'un certain rang, tous ses termes sont supérieurs à $0,999$.

2. On a $\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = 1$.

3. Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite u converge.

II Problème

On note u et v les suites de terme général u_n et v_n définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1 Convergence rapide de la suite u

1. Déterminer la monotonie des suites u et v et déterminer à partir de quel rang, elles sont strictement monotones.

2. En déduire que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite l.

3. *Valeurs approchées de l* :

(a) Justifier que pour $n \geqslant 1$, on a $|u_n - l| \leqslant \frac{1}{n!}$.

(b) En déduire un entier N à partir duquel le nombre u_N est une approximation de l à 10^{-2} près.

(c) Calculer u_3 et v_3, en déduire que le nombre l n'est pas un entier.

2 Qui est vraiment ce nombre l ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t}{n!}$.

4. Démontrer que la suite (I_n) converge vers 0.

5. On note $\mathrm{e} = \exp(1)$. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \mathrm{e} - u_n.$$

6. En déduire que $l = \mathrm{e}$.

III Pour terminer

Exercice 6 (Grands dénominateurs) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers strictement positifs. telles que la suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre irrationnel. Le but de l'exercice est de démontrer que la suite $(q_n)_n$ des dénominateurs tend vers $+\infty$.

Pour la preuve nous raisonnons par l'absurde, nous supposons donc que (q_n) ne tend pas $+\infty$.

1. Soit (u_n) une suite d'entiers. Démontrer que si u converge, alors elle est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} = u_n$.

2. Traduire avec des quantificateurs le fait que (q_n) ne tende pas vers $+\infty$.

3. En déduire qu'il existe un réel A tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante notée $HR(n)$ est vraie :

$HR(n)$: «il existe des entiers $\phi(0) < \phi(1) < \ldots < \phi(n)$ tels que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $q_{\phi(k)} \leqslant A$». On pourra raisonner par récurrence.

Nous avons donc construit une suite extraite $(q_{\phi(n)})$ de (q_n) qui est majorée.

4. En déduire que la suite $(p_{\phi(n)})$ est bornée.

5. Conclure.