

Corrigé du DS de MATHÉMATIQUES n°1
Samedi 14 septembre 2024

Durée de l'épreuve : 1 heure 40 de 10h à 11h40
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

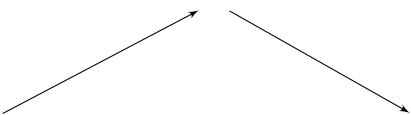
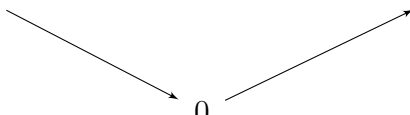
Exercice 1 (Une inégalité) On note f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 8.$$

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} car polynomiale et on a $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5) = 3(x - 1)(x + 5)$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-5	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$						

2. En déduire les solutions dans $[0, +\infty[$ de l'inéquation :

$$\frac{x^3 + 6x^2}{15x - 8} \geq 1.$$

On a

$$\frac{x^3 + 6x^2}{15x - 8} \geq 1 \iff \frac{x^3 + 6x^2}{15x - 8} \geq \frac{15x - 8}{15x - 8} \iff \frac{x^3 + 6x^2 - 15x + 8}{15x - 8} \geq 0 \iff \frac{f(x)}{15x - 8} \geq 0 \quad (1)$$

Comme f admet un minimum sur $[0, +\infty[$ en 1, on a pour $x \geq 0$, $f(x) \geq f(1) = 0$. Ainsi f est positive sur \mathbb{R}^+ .

On en déduit que les solutions de l'inéquation sont les nombres de $]\frac{8}{15}, +\infty[$.

Exercice 2 (Calcul de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. On a

$$S = x^{20} + x^{22} + x^{24} + \dots + x^{98} + x^{100} = (x^2)^{10} + (x^2)^{11} + (x^2)^{12} + \dots + (x^2)^{49} + (x^2)^{50}.$$

S est donc une somme géométrique de raison x^2 .

Si $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire pour x différent de 1 et -1 , on a $S = \frac{(x^2)^{10} - (x^2)^{51}}{1 - x^2} = \frac{x^{20} - x^{102}}{1 - x^2}$.

Si $x = \pm 1$, alors $S = 1 + 1 + \dots + 1 = 41$ car il y a $50 - 10 + 1 = 41$ termes dans la somme.

2.
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j(j+1)}$$

Il s'agit en fait d'une somme double, avec un découpage plus pratique que l'autre. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n (2j+1) = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 \right) = \frac{1}{6} \left(2 \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j(j+1)} = \frac{n(n+2)}{6}.$$

Exercice 3 Résoudre sur \mathbb{R} les équations ou inéquations suivantes :

1. $|5x + 1| \leq 3$.

$$\text{On a } |5x + 1| \leq 3 \iff -3 \leq 5x + 1 \leq 3 \iff -4 \leq 5x \leq 2 \iff \frac{-4}{5} \leq x \leq \frac{2}{5}.$$

2. $\lfloor 5x + 1 \rfloor = 3$

$$\text{On a } \lfloor 5x + 1 \rfloor = 3 \iff 3 \leq 5x + 1 < 4 \iff \frac{2}{5} \leq x < \frac{3}{5}.$$

Exercice 4 (Une récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $\sum_{k=1}^1 (-1)^k k^2 = -1$ et $(-1)^1 \frac{1(1+1)}{2} = -1$.

Supposons que c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^n (n+1)}{2} (n - 2(n+1)) = \frac{(-1)^n (n+1)}{2} (-n-2) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

ce qui prouve que c'est vrai pour $n + 1$.

Exercice 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des réels. On veut démontrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2.$$

On pose aussi :

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, développer $f(x)$, exprimer le résultat en fonction de A, B et C .

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (x^2 a_k^2 + b_k^2 + 2x a_k b_k) \\ &= x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k \\ &= Ax^2 + 2xC + B \end{aligned}$$

2. En déduire de l'étude du signe de f , l'inégalité demandée.

Si tous les a_k sont nuls, alors l'inégalité est vraie car elle devient $0 \leq 0$.

Sinon, il existe au moins un des a_k qui est non nul et alors la somme $A = \sum_{k=1}^n a_k^2$ est strictement positive, en particulier non nulle. La fonction f est donc une fonction polynomiale du second degré, qui est toujours positive ou nulle, car $f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$ est une somme de carrés, donc de nombres positifs ou nuls. Le discriminant Δ de f vérifie donc $\Delta \leq 0$. En effet, si $\Delta > 0$, alors f s'annule deux fois et change de signe. Or on a $\Delta = 4C^2 - 4AB$, ce qui donne, $C^2 \leq AB$ et donc par croissance de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{C^2} \leq \sqrt{A}\sqrt{B}$.

Comme $\sqrt{C^2} = |C|$, on obtient bien le résultat.

3. Application : démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

On pose pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \sqrt{k}$ et $b_k = 1$. On a alors le résultat par l'inégalité de

Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \sqrt{k} &= \sum_{k=1}^n a_k b_k \\ &= \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n k} \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \times \sqrt{n} \\ &= n \sqrt{\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

Pour les plus rapides

Exercice 6 Soit a_1, \dots, a_n des réels. Démontrer que :

$$\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$

On pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = \sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{a_i a_j x^{i+j}}{i+j}$