Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Corrigé du DS de MATHÉMATIQUES n°1
Samedi 14 septembre 2024

Durée de l'épreuve : 1 heure 40 de 10h à 11h40
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1 (Une inégalité) On note f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 8.$$

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale et on a $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2+4x-5) = 3(x-1)(x+5)$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-5		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. En déduire les solutions dans $[0,+\infty[$ de l'inéquation :

$$\frac{x^3+6x^2}{15x-8} \geqslant 1.$$

On a

$$\frac{x^3+6x^2}{15x-8} \geqslant 1 \iff \frac{x^3+6x^2}{15x-8} \geqslant \frac{15x-8}{15x-8} \iff \frac{x^3+6x^2-15x+8}{15x-8} \geqslant 0 \iff \frac{f(x)}{15x-8} \geqslant 0 \tag{1}$$

Comme f admet un minimum sur $[0,+\infty[$ en 1, on a pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(1) = 0$. Ainsi f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que les solutions de l'inéquation sont les nombres de $]\frac{8}{15},+\infty[$.

Exercice 2 (Calcul de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. On a

$$S = x^{20} + x^{22} + x^{24} + \cdots + x^{98} + x^{100} = (x^2)^{10} + (x^2)^{11} + (x^2)^{12} + \cdots + (x^2)^{49} + (x^2)^{50}.$$

S est donc une somme géométrique de raison x^2.
Si $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire pour x différent de 1 et -1, on a $S = \frac{(x^2)^{10}-(x^2)^{51}}{1-x^2} = \frac{x^{20}-x^{102}}{1-x^2}$.
Si $x = \pm 1$, alors $S = 1 + 1 + \ldots + 1 = 41$ car il y a $50 - 10 + 1 = 41$ termes dans la somme.

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j(j+1)}$

Il s'agit en fait d'une somme double, avec un découpage plus pratique que l'autre. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}(2j+1) = \frac{1}{6}\left(2\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{6}\left(2\frac{n(n+1)}{2} + n\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j(j+1)} = \frac{n(n+2)}{6}.$$

Exercice 3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $|5x+1| \leqslant 3$.
On a $|5x+1| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant 5x+1 \leqslant 3 \iff -4 \leqslant 5x \leqslant 2 \iff \frac{-4}{5} \leqslant x \leqslant \frac{2}{5}$.

2. $\lfloor 5x+1 \rfloor = 3$
On a $\lfloor 5x+1 \rfloor = 3 \iff 3 \leqslant 5x+1 < 4 \iff \dfrac{2}{5} \leqslant x < \dfrac{3}{5}$.

Exercice 4 (Une récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n\frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k^2 = -1$ et $(-1)^1\frac{1(1+1)}{2} = -1$.
Supposons que c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^n\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^n(n+1)}{2}(n - 2(n+1)) = \frac{(-1)^n(n+1)}{2}(-n-2) = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

ce qui prouve que c'est vrai pour $n+1$.

Exercice 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2.$$

On pose aussi :

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, développer $f(x)$, exprimer le résultat en fonction de A, B et C.

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (x^2 a_k^2 + b_k^2 + 2x a_k b_k) \\ &= x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k) \\ &= Ax^2 + 2xC + B \end{aligned}$$

2. En déduire de l'étude du signe de f, l'inégalité demandée.

Si tous les a_k sont nuls, alors l'inégalité est vraie car elle devient $0 \leqslant 0$.

Sinon, il existe au moins un des a_k qui est non nul et alors la somme $A = \sum_{k=1}^n a_k^2$ est strictement positive, en particulier non nulle. La fonction f est donc une fonction polynomiale du second degré, qui est toujours positive ou nulle, car $f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$ est une somme de carrés, donc de nombres positifs ou nuls. Le discriminant Δ de f vérifie donc $\Delta \leqslant 0$. En effet, si $\Delta > 0$, alors f s'annule deux fois et change de signe. Or on a $\Delta = 4C^2 - 4AB$, ce qui donne, $C^2 \leqslant AB$ et donc par croissance de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{C^2} \leqslant \sqrt{A}\sqrt{B}$. Comme $\sqrt{C^2} = |C|$, on obtient bien le résultat.

3. Application : démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

On pose pour $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \sqrt{k}$ et $b_k = 1$. On a alors le résultat par l'inégalité de

Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \\
&= \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \times \sqrt{n} \\
&= n\sqrt{\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}$$

Pour les plus rapides

Exercice 6 Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Démontrer que :

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \frac{a_i a_j}{i+j} \geqslant 0.$$

On pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \frac{a_i a_j x^{i+j}}{i+j}$