Enseignement supérieur
Classes préparatoires aux grandes écoles

Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Devoir surveillé de MATHÉMATIQUES n°2
Samedi 28 septembre 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 Calculer les sommes suivantes :

1. $3^{20} + 3^{22} + 3^{24} + \cdots + 3^{98} + 3^{100}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=5}^{100} k^3 - \sum_{i=3}^{98}(i+1)^3$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n}{k-1} 5^k$.

Exercice 2 (Trigonométrie) Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation $\sin 3x = \sin x$ sur $[0, \frac{3\pi}{2}]$

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x$.

3. Déterminer une valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 (Calcul de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que pour tous entiers n et p vérifiant $0 < p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

2. En déduire les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

Exercice 4 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. Donner la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$ après avoir justifié sur quel intervalle était dérivable la fonction.

2. Calculer en utilisant un taux de variations $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$.

II Un petit problème : somme alternée des inverses des entiers impairs

Le but de l'exercice est d'estimer la somme suivante :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

On pose $I=\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et on note tan la fonction tangente définie pour $x\in I$ par :

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

1. Justifier que la fonction tangente ainsi définie est dérivable sur I, et exprimer $\tan'(x)$ en fonction de $\tan x$ pour tout $x\in I$.

2. En déduire que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a $0\leqslant\tan x\leqslant 1$.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Démontrer par un calcul de primitive que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\tan^{2k}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2k+1}.$$

4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}+(-1)^n u_{n+1}.$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6. En déduire en considérant u_n+u_{n+1} que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$0\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{1}{4n+2}.$$

7. En déduire la limite l lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

On écrit alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=l.$$

III S'il reste du temps

Exercice 5 On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left((2+\sqrt{3})^n \pi\right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le nombre $k_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier.

2. En déduire que la suite (u_n) converge.