Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

DEVOIR SURVEILLÉ n°11
samedi 14 juin 2025

Durée de l'épreuve : 2 heures
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Algèbre

Exercice 1 (Vrai ou Faux) Répondez par vrai ou par faux en justifiant bien vos affirmations. Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $n \geq 2$,

1. On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Alors on a :

$$\sigma = (1427)(58) \quad \text{et} \quad \epsilon(\sigma) = 1.$$

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors N n'est pas inversible.

3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: (il existe $X \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $AX = 0$) $\Leftrightarrow$ ($\det(A) = 0$).

Exercice 2 (Inversibilité d'une matrice) Soit $a \in \mathbb{C}$, on pose $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, -1, a)$ et $w = (0, a, a+1)$.

On note $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $M_a = \begin{pmatrix} 2a-1 & 3 & 2-a \\ 1 & a-1 & 2a+1 \\ a+1 & 2a & 3a+3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

1. Pour quelles valeurs de a la famille (u, v, w) forme une base de $\mathbb{C}^3$?

2. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det_\beta(2u - v, v + w, u + v + 2w) = \lambda \det_\beta(u, v, w)$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que la matrice M_a soit inversible.

II Probabilités

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

1. Soit A et B deux évènements. Redémontrer le résultat de cours :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

2. En déduire, pour tout entier k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k - 1)$ et de $P(X > k)$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.

Calculer, pour tout entier naturel k, $P(X \leqslant k)$, puis donner la loi de X (on pourra noter pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, X_i le numéro de la boule obtenue au i-ème tirage).

5. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la question 3, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

Exercice 4 (Marche aléatoire) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P). On suppose qu'elles sont indépendantes et qu'elles suivent la même loi définie par :

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose :

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Soit $t > 0$ un réel.

1. Démontrer que $E(\exp(tS_n)) = \operatorname{ch}(t)^n$.

2. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - t\varepsilon\right).$$

On pourra utiliser librement que pour tout réel x, on a $\operatorname{ch}(x) \leqslant \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

3. En déduire que $P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2n}\right)$.