Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

CONCOURS BLANC n°2
MATHÉMATIQUES
jeudi 22 mai 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 (Étude d'une suite récurrente, extrait des petites mines) Soit f la fonction telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon.

1. Obtenir l'ensemble de définition D de f.

2. f est-elle dérivable en 0 ?

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.

4. Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

On note v la suite telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$.

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant e$.

6. En déduire que la suite v converge et déterminer sa limite.

7. Montrer que $\forall x \geqslant e, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

9. Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Exercice 2 (Nature de série) Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{2n^3}{n^7+1}$ **2.** $u_n = \frac{5+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **3.** $u_n = \frac{n^2 \ln n}{4^n}$

II Problème d'algèbre : réduction des matrices de rang un

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans tout l'exercice M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1, on note $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si, il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 *Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang un sont semblables, si et seulement si, elles ont la même trace.*

1. Exemples en petite taille

Donner, en complétant les coefficients de la matrice suivante $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$,

un exemple de matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans chacun des trois cas suivants :

i) $\mathrm{rang}(A) = 1$, ii) $\mathrm{rang}(A) = 2$, iii) $\mathrm{rang}(A) = 3$.

2. Un exemple : dans cette question uniquement, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $u(1, -1)$ et $u(1, 1)$, en déduire une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice D de u est diagonale.

(b) Préciser le lien matriciel reliant les matrices A et D.

3. **(a)** Le théorème 1 est-il vrai pour des matrices de rang deux ?

(b) Le théorème 1 reste-t-il vrai si l'on remplace le mot «semblables» par «équivalentes» ?

4. Existence d'un polynôme annulateur

Les colonnes d'une matrice de rang 1 sont toutes proportionnelles à une même colonne, ainsi les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M sont de la forme $\alpha_i\beta_j$ avec α_i et β_j des scalaires dans $\mathbb{K}$.

Déterminer deux matrices colonnes X et Y de taille n telles que $M = XY^\top$. En déduire que

$$M^2 = \lambda M \quad \text{avec } \lambda = \mathrm{Tr}(M).$$

5. La trace est valeur propre

Dans la suite du texte, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(a) Démontrer à l'aide de l'égalité $M^2 = \lambda M$ que la matrice $M - \lambda I_n$ est non inversible.

(b) En déduire qu'il existe un vecteur a non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que $u(a) = \lambda a$.

6. Diagonalisation de M lorsque $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.

On suppose que $\lambda = \mathrm{Tr}(M) \neq 0$.

(a) Démontrer que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Vect}\,\{a\}$.

(b) En déduire que la matrice M est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

7. Et si $\mathrm{Tr}(M) = 0$?

On suppose que $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Démontrer que la matrice M est semblable à la matrice «bloc» suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Démontrer le théorème 1.

III Un dernier exercice : Fonctions absolument monotones

Soit I un intervalle non réduit à un point contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$ sur I. On dit que f est absolument monotone sur I.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \quad \text{avec } R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tx)\, \mathrm{d}t.$$

2. Soit $r > 0$ un réel tel que $[-r, r] \subset I$. Démontrer que pour tout $x \in [0, r]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} R_n(r)$.

3. En déduire que pour tout $x \in [0, r[$, la suite de terme général $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge vers $f(x)$ (on pourra comparer $R_n(r)$ et $f(r)$).

On écrit alors :

$$\forall x \in [0, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Nous allons appliquer ce résultat à la fonction tangente.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}.$$

5. En déduire qu'il existe une suite (a_n) de réels tels que :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

6. Donner la valeur de a_0 et a_1, puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$