La Merci
MONTPELLIER
LYCEE PRIVE D'ENSEIGNEMENT GENERAL TECHNOLOGIQUE ET SUPERIEUR
Enseignement supérieur
Classes préparatoires aux grandes écoles

Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Devoir surveillé de MATHÉMATIQUES n°1
Samedi 14 septembre 2024

Durée de l'épreuve : 1 heure 40 de 10h à 11h40
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1 (Une inégalité) On note f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 8.$$

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

2. En déduire les solutions dans $[0,+\infty[$ de l'inéquation :

$$\frac{x^3+6x^2}{15x-8} \geqslant 1.$$

Exercice 2 (Calcul de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $x^{20} + x^{22} + x^{24} + \cdots + x^{98} + x^{100}$. **2.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i^2}{j(j+1)}$

Exercice 3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $|5x+1| \leqslant 3$. **2.** $\lfloor 5x+1 \rfloor = 3$

Exercice 4 (Une récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2.$$

On pose aussi :

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, développer $f(x)$, exprimer le résultat en fonction de A, B et C.

2. En déduire de l'étude du signe de f, l'inégalité demandée.

3. Application : démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Pour les plus rapides

Exercice 6 Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels. Démontrer que :

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \frac{a_i a_j}{i+j} \geqslant 0.$$

On pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \frac{a_i a_j x^{i+j}}{i+j}$