Corrigé du DS de MATHÉMATIQUES n°9
mercredi 7 mai 2025

Durée de l'épreuve : 1 heure 30 de 8h à 9h30
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Démontrer que pour toutes matrices U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(UV) = \mathrm{Tr}(VU)$.

2. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On rappelle que si v est un endomorphisme, la notation v^2 désigne l'endomorphisme $v \circ v$.

1. Déterminer le rang de $A-3I_3$, en déduire un vecteur $a \in \mathbb{K}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(u-3\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(a)$.

La matrice de $u - 3\,\mathrm{id}$ dans $\mathcal{B}$ est $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. On remarque $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc $\mathrm{rg}(A - 3I_3) \leqslant 2$ et comme (C_1, C_2) est libre $\mathrm{rg}(A - 3I_3) = 2$ et par le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}) = 1$. Comme $e_1 + e_2 + e_3$ non nul est dans $\mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})$, c'en est une base.

Donc $\mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})$ est une droite engendrée par $\boxed{(1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3}$.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.

La matrice de $u - 2\,\mathrm{id}$ dans $\mathcal{B}$ est $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 4y - 2z & = 0 \\ \quad 4y - 3z & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = z \\ y & = \frac{3}{4}z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$ est une droite engendrée par $\boxed{(4, 3, 4) = 4e_1 + 3e_2 + 4e_3}$.

3. Les espaces $\mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$ ne sont pas supplémentaires puisque la somme de leur dimension ne vaut pas 3.

4. Écrire la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $(u-2\,\mathrm{id})^2$, en déduire $\dim \mathrm{Ker}((u-2\,\mathrm{id})^2)$.

Par dictionnaire, la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $(u-2\,\mathrm{id})^2$ est la matrice

$$\boxed{(A-2I_3)^2=\begin{pmatrix}3&4&-6\\3&4&-6\\3&4&-6\end{pmatrix}}.$$

Elle est clairement de rang 1, donc d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(u-2\,\mathrm{id})^2 = \dim \mathbb{K}^3 - \operatorname{rg}((u-2\,\mathrm{id})^2)=1$.

5. En déduire que $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}(u-3\,\mathrm{id})\oplus\operatorname{Ker}\left((u-2\,\mathrm{id})^2\right)$ (on pourra utiliser une équation de $\operatorname{Ker}(u-2\,\mathrm{id})^2$).

On a déjà $\dim\mathbb{R}^3=\dim\operatorname{Ker}(u-3\,\mathrm{id})+\dim\operatorname{Ker}\left((u-2\,\mathrm{id})^2\right)$.

Montrons que $\operatorname{Ker}(u-3\,\mathrm{id})\cap\operatorname{Ker}\left((u-2\,\mathrm{id})^2\right)=\{0\}$.

Soit $a\in\operatorname{Ker}(u-3\,\mathrm{id})\cap\operatorname{Ker}\left((u-2\,\mathrm{id})^2\right)$. Comme $a\in\operatorname{Ker}(u-3\,\mathrm{id})$, $a=(t,t,t)$ avec $t\in\mathbb{R}$. De plus a appartient au plan $\operatorname{Ker}\left((u-2\,\mathrm{id})^2\right)$ d'équation $3x+4y-6z=0$, donc $3t+4t-6t=0$ d'où $t=0$ et $a=0$.

Ainsi on a bien $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}(u-3\,\mathrm{id})\oplus\operatorname{Ker}\left((u-2\,\mathrm{id})^2\right)$.

6. On pose $v=u-2\,\mathrm{id}$. Déterminer un vecteur b de $\operatorname{Ker} v^2$ qui n'est pas dans $\operatorname{Ker} v$, puis démontrer que la famille $(b,v(b))$ est une base de $\operatorname{Ker} v^2$.

Le plan $\operatorname{Ker} v^2$ a pour équation $3x+4y-6z=0$, donc par exemple $b=(2,0,1)$ vérifie cette équation, donc est dans $\operatorname{Ker} v^2$, et il n'est pas dans $\operatorname{Ker} v$ car $\operatorname{Ker} v=\operatorname{Vect}((4,3,4))$ et clairement $(2,0,1)$ n'est pas colinéaire à $(4,3,4)$.

Comme $b\in\operatorname{Ker} v^2$, on a $v^2(b)=0$, donc $v(v(b))=0$, donc $v(b)\in\operatorname{Ker} v\subset\operatorname{Ker} v^2$. De plus s'il existe des scalaires λ et μ tels que $\lambda b+\mu v(b)=0$, alors en composant par v, on a $\lambda v(b)=0$, donc $\lambda=0$ car $v(b)$ non nul puisque $v\notin\operatorname{Ker} v$. De même $\mu=0$. Donc $(b,v(b))$ est une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Ker} v^2$ donc une base de $\operatorname{Ker} v^2$ car $\dim\operatorname{Ker} v^2=2$.

7. En déduire que $\mathcal{B}'=(a,b,v(b))$ est une base de $\mathbb{K}^3$, écrire la matrice A' de u dans cette base. Préciser le lien matriciel entre A et A'.

La famille $\mathcal{B}'=(a,b,v(b))$ est une base de $\mathbb{K}^3$ car adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}(u-3\,\mathrm{id})\oplus\operatorname{Ker}\left((u-2\,\mathrm{id})^2\right)$.

Dans cette base, la matrice de u est :

$$A'=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

En effet, $a\in\operatorname{Ker}(u-3\,\mathrm{id})$, donc $u(a)=3a$, d'où la première colonne. Ensuite $v(b)=u(b)-2b$, donc $u(b)=2b+v(b)$, d'où la deuxième colonne. Enfin, comme $v(b)\in Kerv^2$, on a $v(b)\in\operatorname{Ker} v=\operatorname{Ker}(u-2\,\mathrm{id})$, donc $u(v(b))=2v(b)$, d'où la troisième colonne.

8. On pose $B=\operatorname{diag}(1,2,3)$. Les matrices A et B sont-elles semblables ? Sont-elles équivalentes ? On $\operatorname{Tr}(B)=6$ et $\operatorname{Tr}(A)=7$, donc A et B ne sont pas semblables. La matrice A' est clairement de rang 3, donc par dico, $\operatorname{rg} u=\operatorname{rg} A'=\operatorname{rg} A=3$. Comme $\operatorname{rg} B=3$, A et B sont bien équivalentes.

9. La matrice A est-elle semblable à la matrice $C = \mathrm{diag}(3, 2, 2)$?

Si c'est vrai, alors $A - 2I_3$ est semblable à $C - 2I_3 = \mathrm{diag}(1, 0, 0)$. Or $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2$ mais $\mathrm{rg}(C - 2I_3) = 1$, donc elles ne sont pas semblables.

Exercice 3 (Endomorphisme localement nilpotent) Soit f un endomorphisme de E avec $\dim E = n$. On suppose que f est localement nilpotent, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N},\ f^p(x) = 0.$$

1. Démontrer que f est nilpotent. L'idée est d'introduire une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Comme f est localement nilpotent, il est en particulier «nilpotent sur les e_i», donc il existe des entiers $p_1, \ldots, p_n$ tels que $f^{p_1}(e_1) = 0, \ldots, f^{p_n}(e_n) = 0$. Mais alors en prenant par exemple $N = \max(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, on a pour tout i, $f^N(e_i) = 0$. Cela implique que $f^N = 0$. En effet, pour tout $x \in E$, en écrivant $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ avec les x_i dans $\mathbb{R}$, on a par linéarité de f^N :

$$f^N(x) = f^N(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f^N(e_1) + \cdots + x_nf^N(e_n) = 0.$$

2. Le résultat persiste-t-il si E est de dimension infinie ? Non, car dans $\mathbb{K}[X]$ l'endomorphisme dérivation D est localement nilpotent : si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré n, alors sa dérivée $n+1$-ième est nulle, donc $D^{n+1}(P) = 0$. En revanche D n'est pas nilpotent car sinon, il existerait un entier N tel que $D^N = 0$. En particulier, on aurait $D^N(X^N) = 0$, or $D^N(X^N) = N!$.

Fin de l'énoncé[1]

1. **Bonus :** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que M est la somme de deux matrices inversibles.