Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Corrigé du DS de MATHÉMATIQUES n°8
Samedi 5 avril 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (4x - y + 5z, -2x - y - z, -4x + y - 5z).$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x - y + 5z &=& 0 \\ -2x - y - z &=& 0 \\ -4x + y - 5z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x - y + 5z &=& 0 \\ 2x + y + z &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{car } L_3 = -L_1 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x - y + 5z &=& 0 \\ 6x + 6z &=& 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 4x + 5z = z \\ x &=& -z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = z(-1,1,1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(-1,1,1)\}}$ et comme le vecteur $(-1,1,1)$ est non nul, il constitue une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. En pariculier $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, donc f non injective, donc non bijective.

2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$, puis comparer $\operatorname{Im} f$ et P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + z = 0$.

Par le théorème du rang, on a

$$\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2.$$

Les vecteurs $u = f(1,0,0) = (4,-2,-4)$ et $v = f(0,1,0) = (-1,-1,1)$ sont dans $\operatorname{Im} f$. Leurs coordonnées sont non proportionnelles, ils forment donc une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$ qui est de dimension 2, ils en donc forment une base.

Les coordonnées des vecteurs u et v vérifient l'équation du plan P. Donc u et v sont dans P, donc $\operatorname{Vect}\{u,v\} = \operatorname{Im} f$ est inclus dans P car P est stable par combinaison linéaire. On en déduit que $\operatorname{Im} f = P$ car ils ont la même dimension.

3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$? Donner un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans $\mathbb{R}^3$.

On remarque que le vecteur $(-1, 1, 1)$ qui engendre $\operatorname{Ker} f$ est aussi dans $\operatorname{Im} f$ car ses coordonnées vérifient l'équation $x + z = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \neq \{0\}$ et donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Comme $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2, il suffit de trouver une droite de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas dans $\operatorname{Im} f$. Or le vecteur $i = (1, 0, 0)$ n'est pas dans $\operatorname{Im} f$ puisque ses coordonnées ne vérifie pas son équation $x + z = 0$. Si on pose $\Delta = \operatorname{Vect}\{i\}$, on a donc $\Delta \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ et $\dim \Delta + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\Delta \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (Autour du théorème des accroissements finis)

1. Énoncer correctement le théorème des accroissements finis sur un intervalle $[a, b]$, puis faire un dessin et donner une interprétation graphique en utilisant le mot «parallèle».

2. On note f la fonction définie par $f(t) = \arctan t$. Soit $x > 0$, appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ et en déduire que :

$$\forall x > 0, \frac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x.$$

f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, donc d'après TAF, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0$, donc

$$\arctan x = \frac{x}{1 + c_x^2}.$$

Comme $0 < c_x < x$, on a par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, $0^2 < c_x^2 < x^2$, puis $1 < 1 + c_x^2 < 1 + x^2$, d'où $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c_x^2} < 1$, puis pour $x > 0$, $\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c_x^2} < x$, et donc $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$.

Exercice 3 (Indice de nilpotence) Dans tout l'exercice, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$ (on rappelle que f^p désigne l'endomorphisme $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ termes}}$).

On appelle indice de nilpotence de f le plus petit entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^r = 0$.

1. On note f cet endomorphisme. Appppliquer f à un polynôme fait chuter le degré de 3. Si on l'applique 8 fois, on aura fait chuter le degré de 24, et donc pour tout $P \in \mathbb{K}_{22}[X]$, on a $f^8(P) = 0$. L'indice de f est 8 car $f^7(X^{22}) \neq 0$ puisque ce sera un monôme de degré $22 - 21 = 1$.

On suppose en plus que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme nilpotent de E non nul d'indice r.

2. On fixe un vecteur $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$. Démontrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est une famille libre de E. Comparer ainsi r et $\dim E$.

Soit λ_0, λ_{r-1} des réels tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \ldots + \lambda_{r-1} f^{r-1}(x) = 0$. En composant par f^{r-1}, on obtient $\lambda_0 f^{r-1}(x) = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$ car $f^{r-1}(x) \neq 0$. Ainsi $\lambda_1 f(x) + \ldots + \lambda_{r-1} f^{r-1}(x) = 0$.

On compose alors par f^{r-2}, on obtient $\lambda_1 f^{r-1}(x)=0$ et donc λ_1. On réitère le procédé, et on obtient $\lambda_1=\ldots=\lambda_{r-1}=0$ et donc la famille $(x,f(x),\ldots,f^{r-1}(x))$ est une famille libre de E.

Cette famille libre est constituée de r vecteurs et $\dim E=n$, donc $r\leqslant n$. L'indice de nilpotence est don majorée par la dimension de l'espace.

3. Notons $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et remarquons que le produit Ae_i est égal à la colonne n°i de la matrice A. Donc si $AX=0$ pour toute matrice colonne $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est vrai pour $X=e_i$ et ceci pour tout i, donc A a toutes ses colonnes nulles, donc A est nulle.

4. En déduire, en considérant un certain endomorphisme que si $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, alors $N^n=0$.

Si N est nilpotente, alors il existe un entier $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $N^p=0$. Considérons alors son endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé $f:X\mapsto AX$. On a alors pour $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ f^p(X)=N^pX=0$, donc $f^p=0$ et f est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Son indice de nilpotence est majoré par $\dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})=n$, donc $f^n=0$, donc pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ f^n(X)=N^nX=0$, ce qui implique que $N^n=0$.

5. Application : démontrer que la matrice

$$N=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

n'admet pas de racines carrées, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de matrice $R\in\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $R^2=N$.

Soit R une racine carrée de N. On a $N^3=0$ donc $R^6=N^3=0$ et R est nilpotente. Comme l'indice de nilpotence est inférieur ou égal à 3, on a $R^3=0$ et donc $R^4=0$. Mais $R^4=N^2\neq 0$. Contradiction. Ainsi N n'admet pas de racines carrées.

II Problème d'analyse

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0,x_1,\ldots,x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts.

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i\in[\![0,n]\!],\ P(x_i)=f(x_i)$.

1 Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{X-x_k}{x_i-x_k}.$$

On pose :

$$L_n(f)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(X).$$

1. Soit $j \in [\![0,n]\!]$. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a $l_i(x_j)=0$ si $i \neq j$ et $l_i(x_i)=1$. Ainsi

$$L_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\underbrace{l_i(x_j)} = f(x_j)l_j(x_j)=f(x_j).$$

Si Q est un autre polynôme interpolateur, $Q-L_n$ s'annule en les x_i donc $n+1$ fois et donc est nul car de degré inférieur ou égal à n.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

2 Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.

On note $\sigma=\{x_0,\dots,x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\pi_\sigma=\prod_{i=0}^{n}(X-x_i).$$

On veut démontrer pour tout réel $x\in[a,b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a,b[, \quad f(x)-L_n(f)(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x).$$

2. Résultat préliminaire : soit $p\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c)=0$.

On le prouve par récurrence sur p. C'est vrai pour $p=1$, d'après le théorème de Rolle.

Supposons que c'est vrai au rang $p-1$. Soit $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois en $a_0<\ldots<a_p$. Alors en appliquant le théorème de Rolle sur les intervalles $[a_k,a_{k+1}]$ pour $k\in[\![0,p-1]\!]$, on obtient $c_k\in]a_k,a_{k+1}[$ tel que $\phi'(c_k)=0$. Ainsi ϕ' s'annule p fois et donc par hypothèse de récurrence, on a $(\phi')^{(p-1)}=\phi^{(p)}$ qui s'annule.

3. Si $x\in\sigma$, on a $f(x)-L_n(f)(x)=0$ et $\pi_\sigma(x)=0$, donc la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie en prenant $c_x=a$ par exemple .

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ.

On définit sur $[a,b]$ une application F par $F(t)=f(t)-L_n(f)(t)-\lambda\pi_\sigma(t)$ où λ est un réel.

4. Comme $x\notin\sigma$, on a $\pi_\sigma(x)\neq 0$ et donc

$$F(x)=0 \iff \lambda=\frac{f(x)-L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)}.$$

5. La fonction F s'annule en x et en chaque point x_i, ce qui donne $n+2$ racines. Comme F est de classe C^{n+1} (comme somme), on en déduit que $F^{(n+1)}$ s'annule en $c_x\in]a,b[$. Comme $\deg L_n(f)\leqslant n$, sa dérivée $n+1$-ième est nulle et $\pi_\sigma^{(n+1)}=(n+1)!$. Ainsi

$$F^{(n+1)}(c_x)=f^{(n+1)}(c_x)-\lambda(n+1)!=0.$$

On conclut en remplaçant λ par son expression ci-dessus.

6. Comme f est de classe C^{n+1}, la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc y est bornée. Pour tout $x \in [a,b]$, la distance entre x et x_i un point d'interpolation est inférieure à $b-a$, donc $|\pi_\sigma(x)| \leqslant (b-a)^{n+1}$. On en déduit que :

$$|f(x) - L_n(f)(x)| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

7. On définit f sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Le développement limité en 0 à l'ordre $2n$ de f est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

De plus, comme f est de classe C^{2n}, d'après Taylor-Young, ce développement s'écrit aussi :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

On en déduit par unicité du DL que : $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = (-1)^k$, donc $f^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$ et que $f^{(2k+1)}(0) = 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\| f^{(2k)} \right\|_\infty \geqslant \left| f^{(2k)}(0) \right| = (2k)!.$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

8. On revient au cas général : démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$. On dit que P est un polynôme interpolateur de Hermite de f aux points x_i.

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par :

$$\phi(P) = (P(x_0), \dots, x_n, P'(x_0), \dots, P'(x_n)) .$$

L'application ϕ est linéaire et si $P \in \operatorname{Ker} \phi$, alors $P(x_i) = P'(x_i) = 0$ pour $i \in [\![0,n]\!]$, donc x_i est racine double de P, mais comme les x_i sont 2 à 2 distincts, P possède $n+1$ racines doubles distinctes, donc la somme des multiplicités de P dépasse $2n+2$, mais comme $\deg P \leqslant 2n+1$, on en déduit que $P = 0$. On vient de montrer que ϕ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, donc ϕ est bijective, ce qui démontre le résultat.

Fin de l'énoncé [1]

1. **Bonus :** soit a et b des réels avec a différent de 0 et 1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout réel x, $f(f(x)) = ax + b$.