

Corrigé du DS de MATHÉMATIQUES n°7
Samedi 15 mars 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00

Professeur : M. de Saint Julien

Les calculatrices sont interdites.

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Algèbre

Exercice 1 On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Classique :

2. Déterminer une base de F .

$$(x, y, z) \in F \iff x = -2y - 3z \iff (x, y, z) = (-2y - 3z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

On note $u = (-2, 1, 0)$ et $v = (-3, 0, 1)$. On a montré que la famille $\mathcal{B} = (u, v)$ engendre F . Elle est de plus libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F .

3. L'ensemble $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Non, car $i = (1, 0, 1)$ et $j = (0, 1, 1)$ sont dans G mais leur somme $i + j = (1, 1, 2)$ n'est pas dans G car ses trois coordonnées sont non nulles.

Exercice 2 (Somme de projecteurs) Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$.

1. Démontrer que $p + q$ est un projecteur.

Comme p et q commutent, on a par le binôme de Newton, $(p + q)^2 = p^2 + 2p \circ q + q^2 = p + 0 + q = p + q$. Donc $p + q$ est bien un projecteur.

2. Démontrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Soit $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$. On a donc $p(x) = q(x) = 0$ donc $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ ce qui montre que $x \in \text{Ker}(p + q)$. Ainsi $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker}(p + q)$.

Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(p + q)$. On doit écrire x comme somme de deux vecteurs dont un dans le noyau de p . On pense donc à écrire $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ car p est un projecteur. Ainsi $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker } p$ et $b \in \text{Im } p$. Or on sait que $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ car $q \circ p = 0$ donc $b \in \text{Ker } q$. Ainsi $x \in \text{Ker } p + \text{Ker } q$. D'où l'inclusion réciproque $\text{Ker}(p + q) \subset \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

3. Démontrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p + \text{Im } q$.

Soit $y \in \text{Im}(p + q)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (p + q)(x) = p(x) + q(x)$. Ainsi $y \in \text{Im } p + \text{Im } q$.
D'où $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im } p + \text{Im } q$.

Réciproquement, soit $y \in \text{Im } p + \text{Im } q$. Il existe a et b dans E tels que $y = p(a) + q(b)$. Alors

$$(p + q)(p(a) + q(b)) = p(p(a)) + \underbrace{p(q(b))}_0 + \underbrace{q(p(a))}_0 + q(q(b)) = p(a) + q(b).$$

Donc $y = (p + q)(x)$ avec $x = p(a) + q(b)$ ce qui montre que $\text{Im } p + \text{Im } q \subset \text{Im}(p + q)$.

4. Dans cette question uniquement, on prend $E = \mathbb{R}^2$ et on note (i, j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose Δ la droite d'équation $y = x$.**(a)** Démontrer que les droites $\text{Vect}(i)$ et Δ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Déjà si $(x, y) \in \text{Vect}(i) \cap \Delta$, on a $y = 0$ et $x = y$, donc $x = y = 0$, donc $(x, y) = (0, 0)$.

Ainsi $\text{Vect}(i) \cap \Delta = \{0\}$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche un réel t tel que $(x, y) = \underbrace{(t, 0)}_{\in \text{Vect}(i)} + (x - t, y)$ avec $(x - t, y) \in$

Δ , ce qui équivaut à $x - t = y$, donc $t = x - y$.

On a donc montré que $(x, y) = \underbrace{(x - y, 0)}_{\in \text{Vect}(i)} + \underbrace{(y, y)}_{\in \Delta}$, ce qui montre que $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(i) + \Delta$,

et achève la preuve.

(b) On note q la projection sur la droite des abscisses $\text{Vect}\{i\}$, parallèlement à la droite Δ . Déduire de la question précédente, les coordonnées de $q(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la décomposition $(x, y) = \underbrace{(x - y, 0)}_{\in \text{Vect}(i)} + \underbrace{(y, y)}_{\in \Delta}$, on a $q(x, y) = (x - y, 0)$.

(c) On note p la projection orthogonale sur la droite des ordonnées $\text{Vect}\{j\}$. L'endomorphisme $p + q$ est-il un projecteur ?

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On sait que $p(x, y) = (0, y)$, donc $(p + q)(x, y) = (x - y, y)$. Donc $(p + q)(1, 1) = (0, 1)$ et $(p + q)^2(1, 1) = (p + q)(0, 1) = (-1, 1) \neq (p + q)(1, 1)$. Ainsi $p + q$ n'est pas un projecteur.

II Analyse

Exercice 3 (Savez-vous calculer des DL ?) Les questions sont indépendantes.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $e^x \cos x$.

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^4 + x^{2020}}{\sin^2 x - x^2}$$

Au voisinage de 0, $\sin^2 x \sim x^2$, donc pour avoir un équivalent de $\sin^2 x - x^2$, il faut un terme de précision supplémentaire dans le DL de $\sin^2 x$. Comme elle est paire, on va chercher son DL_4 : on a (attention à ne pas oublier le double produit)

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - 2x\frac{x^3}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Ainsi par quotient d'équivalents

$$f(x) = \frac{x^4 + x^{2020}}{\sin^2 x - x^2} \sim \frac{x^4}{-\frac{x^4}{3}} = -3.$$

3. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x + \operatorname{sh} x}.$$

(a) Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x + \operatorname{sh} x} = \frac{x}{x + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{2 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{2(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2))} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \end{aligned}$$

(b) En déduire que f se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser l'allure de la courbe au voisinage de 0 (position de la courbe par rapport à sa tangente)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (somme et quotient de fonctions dérivables). On prolonge f en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

On a alors pour x non nul,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{-x^2}{24} + o(x^2)}{x} \sim \frac{-x}{24}$$

En particulier, ce taux d'accroissement tend vers 0, lorsque x tend vers 0, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

De plus, $f(x) - \frac{1}{2} \sim \frac{-x^2}{24}$ de signe négatif au voisinage de 0. La fonction f admet donc un maximum local en 0.

.

Exercice 4

1. Démontrer à l'aide de suites que la fonction $\sin$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Les suites $u_n = n\pi$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ tendent vers $+\infty$ mais les suites $\sin u_n = 0$ et $\sin v_n = 1$ n'ont pas la même limite. Donc $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.

2. On note f la fonction «serpent» définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(a) Démontrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

La fonction f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ par produit et composée.

Pour $x > 0$, on a :

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(b) Démontrer que f n'est pas de classe C^1 en 0.

Pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \times \left(\frac{-1}{x^2} \right) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

Si f est de classe C^1 , alors $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Comme $\sin \left(\frac{1}{x} \right) = f'(x) - 2x \cos \frac{1}{x}$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0$, on a par différence de limites, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0$, ce qui est faux car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sin(X)$ qui n'existe pas.

III Pour terminer

Exercice 5 On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n et g_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \cos^n(x).$$

1. Démontrer par récurrence que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de E (indication : si $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{p=0}^{n+1} a_p \cos px = 0$, montrer que $\sum_{p=0}^{n+1} p^2 a_p \cos px = 0$ puis que $\sum_{p=0}^n ((n+1)^2 - p^2) a_p \cos px = 0$).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(nx)$. Montrer par récurrence que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (indication : si $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{p=0}^{n+1} a_p \cos px = 0$, montrer que $\sum_{p=0}^{n+1} p^2 a_p \cos px = 0$ puis que $\sum_{p=0}^n ((n+1)^2 - p^2) a_p \cos px = 0$).

La fonction f_0 n'étant pas la fonction nulle, la famille (f_0) constituée d'un seul vecteur non nul est libre.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre. Montrons que la famille $(f_0, \dots, f_n, f_{n+1})$ est libre.

Soit $a_0, \dots, a_{n+1}$ des réels tels que $a_0 f_0 + \dots + a_{n+1} f_{n+1} = 0$ (*). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc la combinaison linéaire $a_0 f_0 + \dots + a_{n+1} f_{n+1}$ aussi. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_p''(x) = -p^2 \cos(px)$, donc en dérivant deux fois la combinaison linéaire $a_0 f_0 + \dots + a_{n+1} f_{n+1} = 0$, on obtient que $\sum_{p=0}^{n+1} p^2 a_p f_p = 0$. Comme $a_0 f_0 + \dots + a_{n+1} f_{n+1} = 0$, en multipliant cette équation par $(n+1)$ et en lui soustrayant la relation précédente, on obtient que $\sum_{p=0}^n ((n+1)^2 - p^2) a_p f_p = 0$. Mais alors d'après $HR(n)$, $(f_0, \dots, f_n)$ est libre et donc pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $((n+1)^2 - p^2) a_p = 0$ et donc $a_p = 0$ car $(n+1)^2 - p^2 \neq 0$. La relation (*) devient alors $a_{n+1} f_{n+1} = 0$ et donc $a_{n+1} = 0$ car f_{n+1} n'est pas la fonction nulle.

On a donc bien $a_0 = \dots = a_n = a_{n+1} = 0$ et donc la famille $(f_0, \dots, f_n, f_{n+1})$ est libre.

2. Démontrer que la famille $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ est libre.

Soit $a_0, \dots, a_{n+1}$ des réels tels que $a_0g_0 + \dots + a_ng_n = 0$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_0 + a_1 \cos x + a_2(\cos x)^2 + \dots + a_n(\cos x)^n = 0.$$

Mais alors en considérant le polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(\cos x) = 0.$$

Ainsi P s'annule sur $[-1, 1]$, donc une infinité de fois, donc il est nul et donc ses coefficients sont nuls. Ainsi $a_0 = \dots = a_n = 0$ et donc la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.

Exercice 6 (Fonction coercive) Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $|x| > B$, on a $f(x) > f(a)$.

L'hypothèse sur les limites est équivalente à dire que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

Traduisons la limite :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq B \implies f(x) \geq A.$$

On prend alors $A = |f(a)| + 1 > 0$ et donc pour $|x| > B$, on a $f(x) \geq |f(a)| + 1 > f(a)$.

2. En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

D'une part pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \geq B$, on a $f(x) \geq f(a)$.

D'autre part, la fonction f est continue sur le segment $[-B, B]$ donc f admet un minimum sur $[-B, B]$ d'après le TBA. Ainsi, il existe $b \in [-B, B]$ tel que $\forall x \in [-B, B]$, on a $f(x) \geq f(b)$.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geq \min(f(a), f(b))$. Si $f(a) > f(b)$, on pose $c = a$ et on pose $c = b$ sinon.

On vient de prouver que c est un minimum global pour f .

3. Application : démontrer qu'une fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non constante de degré pair n'est pas surjective.

Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non constante de degré pair. On peut supposer que son coefficient dominant est positif. Alors ses limites en $\pm\infty$ sont égales à $+\infty$. D'après la question précédente, P étant continue, P admet un minimum global en un réel c , donc $P(\mathbb{R}) \subset [f(c), +\infty[$, c'est-à-dire que P n'atteint pas toutes les valeurs réelles, donc P est non surjective.

4. En déduire les fonctions polynomiales $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surjectives.

Si P est constant, $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est non surjective.

Si P est de degré impair, pour tout réel b , on pose $g(x) = P(x) - b$. La fonction g est polynomiale de degré impair, donc ses limites en $\pm\infty$ sont de signe différent, donc d'après le TVI g s'annule, donc P prend la valeur b , donc $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective.