Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Corrigé du DS de MATHÉMATIQUES n°6
Samedi 1 février 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 (Puissances n-ièmes d'une matrice) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $N = A - 2I_2$. Calculer N^2, en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $N^2 = 0$ et donc pour $k \geqslant 2$, on a $N^k = 0$. Puisque N et $2I_2$ commutent, on a par le binôme de Newton,

$$A^n = (2I_2 + N)^n = (2I_2)^n + n(2I_2)^{n-1}N = 2^n I_2 + n2^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P = X^2 - 4X + 4$.

Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par P. On a alors :

$$(\star) \quad X^n = PQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg P = 2.$$

Ainsi R est de la forme $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On évalue $(\star)$ en 2 qui est une racine de P, on a donc $2^n = 2a + b$.

Comme 2 est racine double de P, 2 est aussi racine de P', on va donc dériver $(\star)$ puis évaluer en 2 :

$$nX^{n-1} = P'Q + PQ' + a.$$

D'où $n2^{n-1} = a$, puis $b = 2^n - 2a = 2^n - n2^n = (1-n)2^n$.

Conclusion : $R = n2^{n-1}X + (1-n)2^n$.

3. En déduire une autre méthode de calcul de A^n.

Comme P est un polynôme annulateur de A, on évalue $(\star)$ en A, on obtient $A^n = \underbrace{P(A)}_{0} Q(A) + R(A)$, et donc :

$$A^n = aA + bI_3 = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_3.$$

Exercice 2 On rappelle qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Justifier que Q est inversible et donner son inverse.

On a $\det Q = 1$, donc Q est inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Démontrer que PNP^{-1} est nilpotente.

Par pacman, on a $(PNP^{-1})^p = PN^pP^{-1} = P0P^{-1} = 0$, donc PNP^{-1} est nilpotente.

3. En déduire un exemple de matrice nilpotente M en taille 2 qui n'est pas triangulaire.

On prend notre matrice nilpotente favorite $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on calcule $M = QNQ^{-1}$ avec Q la matrice de la première question. On trouve

$M = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -25 & 10 \end{pmatrix}$ qui est donc nilpotente et non triangulaire.

Exercice 3 (Questions en vrac)

1. Donner la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de $P = X^3 + 2X + 3$.

On remarque que -1 est racine de P, donc P se factorise par $X + 1$. On obtient alors par division euclidienne ou «à la main» que :

$$X^3 + 2X + 3 = (X + 1)(X^2 - X + 3)$$

C'est la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ car on a $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$, donc $X^2 - X + 3$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.

En revanche, $X^2 - X + 3$ est réductible sur $\mathbb{C}$ puisqu'il admet 2 racines $\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$. La décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ est donc :

$$X^3 + 2X + 3 = (X + 1)(X - \frac{1 + i\sqrt{11}}{2})(X - \frac{1 - i\sqrt{11}}{2}).$$

2. Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 sachant que 1 est racine de P, que i est racine double de P et que $P(2) = 100$.

Puisque P est à coefficients réels, $-i$ le conjugué de i est aussi racine double de P, donc P est divisible par $(X - 1)(X - i)^2(X + i)^2 = (X - 1)(X^2 + 1)^2$ qui est de degré 5. Comme $\deg P = 5$, on a $P = \lambda(X - 1)(X^2 + 1)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Comme $P(2) = 100$ et que $P(2) = 25\lambda$, on a $\lambda = 4$, donc $P = 4(X - 1)(X^2 + 1)^2$. Réciproquement ce polynôme convient.

II Problème : calcul de zeta de deux

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(s_n)_n$ définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On note cotan la fonction définie sur $]0, \pi[$ par

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Si $x \in]0, \pi[$, on note aussi $\operatorname{cotan}^2(x) = (\operatorname{cotan}(x))^2$.

I. Étude préliminaire d'un polynôme

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $P = (X+1)^n - (X-1)^n$ et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \gamma_k = -i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

1. Démontrer que la fonction cotan est strictement monotone sur $]0, \pi[$.

La fonction cotan est dérivable sur $]0, \pi[$ (quotient) et on a pour $x \in]0, \pi[$:

$$\operatorname{cotan}'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2} = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0.$$

Donc cotan est strictement décroissante sur $]0, \pi[$ et donc injective.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On remarque déjà que 1 n'est pas racine de P car $P(1) = 2^n \neq 0$. On peut donc supposer $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad (z+1)^n = (z-1)^n \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z-1)} = \mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \\
& \Leftrightarrow \quad z+1 = (z-1)\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \\
& \Leftrightarrow \quad z(1-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}}) = -\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1, \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \\
& \Leftrightarrow \quad z = \frac{-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}}}, \quad k \in \{\mathbf{1}, \dots, n-1\} \quad \text{ou} \quad (k = 0 \quad \text{et} \quad 0 = -2) \\
& \Leftrightarrow \quad z = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}, \quad k \in \{\mathbf{1}, \dots, n-1\} \\
& \Leftrightarrow \quad z = -\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n}}, \quad k \in \{\mathbf{1}, \dots, n-1\} \\
& \Leftrightarrow \quad z = -i\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \{1, \dots, n-1\}
\end{aligned}$$

Les racines complexes de P sont donc les nombres

$$\boxed{\gamma_k = -i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \{1,\dots,n-1\}}.$$

3. Déterminer le degré de P et préciser son coefficient dominant.

Par le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k X^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-(-1)^k)X^{n-k} \\ &= = \binom{n}{0}\times 0 \times X^n + \binom{n}{1}2X^{n-1} + \text{termes de degré} < n-1 \\ P &= = 2nX^{n-1} + \text{termes de degré} < n-1 \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{P \text{ est de degré } n-1 \text{ et son coefficient dominant vaut } 2n}$.

4. En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Comme pour $k \in \{1,\dots,n-1\}$ les nombres $\frac{k\pi}{n}$ sont deux-à deux distincts dans $]0,\pi[$, par injectivité de cotan, les nombres γ_k sont donc aussi 2 à 2 distincts. On a donc trouvé $n-1$ racines à P. Comme il est de degré $n-1$, on les a toutes.

Ainsi

$$P = 2n\prod_{k=1}^{n-1}\left((X + i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

On considère les deux fonctions symétriques élémentaires suivantes :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n-1}\gamma_p\gamma_q$$

qui sont respectivement la somme des racines de P et la somme des produits de 2 racines distinctes de P (sans répétition).

5. Si l'on utilise le développement de P obtenue à la première question, on a

$$P = 2nX^{n-1} + \binom{n}{3}2X^{n-3} + \text{termes de degré} < n-3.$$

Or $\displaystyle\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Comme $2n$ est le coefficient dominant, on a donc

$$\begin{aligned}
P &= 2n\left(X^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}X^{n-3} + \text{termes de degré} < n-3\right) \\
&= 2n\left(X^{n-1} - \sigma_1 X^{n-2} + \sigma_2 X^{n-3} + \text{termes de degré} < n-3\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\sigma_1 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{6}}.$$

6. Le carré d'une somme est la somme des carrés plus tous les doubles produits. Ainsi

$$\sigma_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n-1} \gamma_p \gamma_q.$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2}.$$

7. Or

$$\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^2 = -\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sigma_2 - \sigma_1^2 = 2\sigma_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

II. Application

Soit $p \geqslant 1$ un entier.

8. Démontrer par un argument de convexité que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan x \geqslant x$.

La fonction tan est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée $\frac{1}{\cos^2}$.

On a :

$$[0, \frac{\pi}{2}[\underset{\cos}{\rightarrow}]0, 1] \underset{t \mapsto t^2}{\rightarrow}]0, 1] \underset{t \mapsto \frac{1}{t}}{\rightarrow} [1, +\infty[$$

La fonction $\frac{1}{\cos^2}$ est donc la composée d'une fonction décroissante, d'une croissante et d'une décroissante, elle est donc croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, ce qui montre que tan est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Sa courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0 qui a pour équation $y = x$ car $\tan'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1$. D'où le résultat.

9. En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(x).$$

Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} \overset{\leqslant}{\frac{1}{x}}$, et donc en composant par la fonction carrée qui est croissante sur $]0, +\infty[$, on a $\operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$. Enfin, comme $\sin x \leqslant x$, on a $\sin^2 x \leqslant x^2$ et donc

$$1 + \operatorname{cotan}^2(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \geqslant \frac{1}{x^2}.$$

10. On pose $n = 2p + 1$, alors d'après la question précédente on a

$$\sum_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{2p(2p-1)}{3}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + \sum_{k=p+1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\\
\sum_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + \sum_{k=p+1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\pi - \frac{k\pi}{2p+1}\right)\\
\sum_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + \sum_{k=p+1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi(2p+1-k)}{2p+1}\right)
\end{aligned}$$

Or quand k décrit $\{p+1, \dots, 2p\}$, $2p+1-k$ décrit $\{1, \dots, p\}$, donc par changement de compteur dans la somme en posant $i = 2p+1-k$, on a

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi(2p+1-k)}{2p+1}\right) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi \times i}{2p+1}\right).$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = 2\sum_{i=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi \times i}{2p+1}\right).$$

En particulier

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}}.$$

11. En déduire la limite de la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Pour k entre 1 et p, on utilise l'inégalité proposée avec $\phi = \dfrac{k\pi}{2p+1} \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \leqslant \left(\frac{2p+1}{k\pi}\right)^2 \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

On somme alors pour k allant de 1 à p en utilisant les formules des questions 10 on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &\leqslant \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{p} 1 + \sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\\
\frac{p(2p-1)}{3} &\leqslant \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \leqslant p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.
\end{aligned}$$

On divise par $\dfrac{(2p+1)^2}{\pi^2}$:

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} \leqslant s_p \leqslant \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc, d'après le théorème des gendarmes

$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} s_p = \frac{\pi^2}{6}$ soit $\boxed{S = \dfrac{\pi^2}{6}}$.