

**Corrigé du CONCOURS BLANC n°1 épreuve BIS
MATHÉMATIQUES
jeudi 9 janvier 2025**

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h

Professeur : M. de Saint Julien

Les calculatrices sont interdites.

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 (Point fixe d'une fonction) Si f est une fonction réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle point fixe de f tout réel a de A tel que $f(a) = a$. Les questions peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Déterminer les points fixes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

On doit résoudre l'équation

$$f(x) = x \iff x^3 - 3x^2 + 3x = x \iff x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \iff x(x^2 - 3x + 2) = 0 \iff x(x-1)(x-2) = 0$$

Les points fixes de f sont donc 0, 1 et 2.

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$. Démontrer que f admet un point fixe. Est-il unique ?

On va s'intéresser à la distance entre x et $f(x)$. On pose pour $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(x) - x$. Il suffit donc de montrer que g s'annule. Or $g(0) = f(0) \in [0, 1]$, donc $g(0) \geq 0$. On a aussi $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0, 1]$, donc la fonction continue g change de signe sur $[0, 1]$, donc s'y annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ce point fixe n'est pas unique, puisque si f est par exemple la fonction identité $x \mapsto x$, tout point de $[0, 1]$ est point fixe.

3. La fonction $\exp$ n'admet pas de point fixe comme on peut le deviner graphiquement. Pour le prouver, il suffit de penser à l'inégalité suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq x + 1 > x$.
4. On note u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \exp(u_n)$. La suite u est-elle convergente ? Justifier votre réponse, puis déterminer sa limite.

Si u converge vers l , alors d'après le cours, l est un point fixe de $\exp$ (car $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$). Comme $\exp$ n'admet pas de point fixe, on en déduit que u diverge. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \exp(u_n) \geq u_n + 1 > u_n$, donc u est croissante, mais diverge, donc u tend vers $+\infty$.

Exercice 2 On note $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Déterminer le ou les antécédents éventuels du nombre -1 par f . L'application f est-elle injective ?

Cela revient à résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $(E) : z + \frac{1}{z} = -1$. En multipliant par $z \neq 0$, on obtient que :

$$(E) \iff z^2 + 1 = -z \iff z^2 + z + 1 = 0 \iff z = j \text{ ou } z = \bar{j}.$$

L'application f n'est donc pas injective puisque -1 admet deux antécédents par $f : j$ et $\bar{j}$.

2. Démontrer que f est surjective.

Soit $a \in \mathbb{C}$. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $(E) : z + \frac{1}{z} = a$. En multipliant par $z \neq 0$, on obtient que :

$$(E) \iff z^2 + 1 = az \iff z^2 - az + 1 = 0.$$

Or une équation de degré 2 admet toujours une solution dans $\mathbb{C}$. Comme 0 n'est pas solution de (E) , cette solution est dans $\mathbb{C}^*$, ce qui montre que f est surjective.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit sous forme algébrique $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer l'écriture algébrique de $f(z)$, en déduire que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U}).$$

En multipliant par le conjugué de z , on a $\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$, donc :

$$f(z) = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(y + \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \iff y + \frac{-y}{x^2 + y^2} = 0 \\ &\iff \frac{y(x^2 + y^2) - y}{x^2 + y^2} = 0 \\ &\iff y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ &\iff y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1 \end{aligned}$$

4. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

On a

$$\begin{aligned} f(\mathbb{U}) &= \{f(e^{i\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^{i\theta} + e^{-i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{2\cos\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= [-2, 2] \end{aligned}$$

II Problème : une introduction aux séries

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels, on appelle **série** de terme général u_n , la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On note $\sum_{n \geq 0} u_n$ cette série au lieu de $(S_n)_{n \geq 0}$. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge. Dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa limite, on dit que c'est la somme de la série :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Donner la nature d'une série, c'est indiquer si elle converge ou non. Ce problème propose une introduction à la notion de séries.

1. Deux exemples :

(a) Pour $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ qui tend vers $\frac{3}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

(b) Pour $n \geq 1$, par télescopage, on a $\sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1)$ qui tend vers $+\infty$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} \ln(n+1) - \ln n$ diverge.

2. Condition nécessaire de convergence :

(a) Pour tout $n \geq 1$, on a $S_n - S_{n-1} = u_n$. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors la suite (S_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (S_{n-1}) converge aussi vers l car extraite de (S_n) . Ainsi par différence, $S_n - S_{n-1} = u_n$ tend vers $l - l = 0$.

(b) On a $n \sin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$. Donc le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

- (c) On a vu que la série $\sum_{n \geq 1} \ln(n+1) - \ln n$ diverge mais $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0.

3. Séries de Riemann :

Soit α un réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et donc $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

- (a) Pour $\alpha \leq 0$, la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 (pour $\alpha = 0$ elle vaut 1, pour $\alpha < 0$ elle tend vers $+\infty$), donc d'après la question 3.a, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(b) Un calcul montre que :

- si $\alpha = 1$, alors $I_n = \ln(n+1) - \ln 1$ qui tend vers $+\infty$.
- si $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, on a $I_n = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \right)$.
Si $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha - 1 < 0$, donc I_n tend vers $+\infty$.
Si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$ et $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ tend vers 0, donc I_n tend vers $\frac{1}{\alpha-1}$.

- (c) Soit $k \geq 1$, par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, puis en intégrant on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \\ \int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^\alpha} &\leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^\alpha} \\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \end{aligned}$$

On somme maintenant les inégalités de $k = 1$ à $k = n$ à $k = n$ (pour $n \geq 1$), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \\ S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^\alpha} &\leq I_n \leq S_n \end{aligned}$$

On en déduit que pour $n \geq 1$,

$$I_n \leq S_n \leq I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

- (d) Pour $\alpha \in]0, 1]$, on a $S_n \geq I_n$ avec I_n qui tend vers $+\infty$. On en déduit par comparaison que la suite (S_n) tend aussi vers $+\infty$.

Pour $\alpha > 1$, on a $S_n \leq I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. Or $I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ a une limite finie, donc en particulier est bornée, ce qui prouve que la suite (S_n) est majorée. Comme elle est de plus croissante (car pour tout $n \geq 1$, on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$), d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Conclusion : la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4. Critère pour des séries alternées :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ car la suite (a_n) décroît. Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.

De même, $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}a_{2n+3} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$ car la suite (a_n) décroît. Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.

Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ tend vers 0 car la suite (a_n) tend vers 0 donc la suite extraite (a_{2n+1}) aussi.

Conclusion : les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite, et donc par théorème, la suite (S_n) est convergente, *i.e.* la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

- (b) On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge car la suite $(\frac{1}{2n+1})$ décroît et tend vers 0. .

- (c) On note S la somme de la série précédente, c'est-à-dire $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Comme les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, on a pour tout n , $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |S_{2n} - S| \leq |S_{2n+1} - S_{2n}| = \frac{1}{2(2n+1)+1} = \frac{1}{4n+3}.$$

En particulier, si $\frac{1}{4N+3} \leq 10^{-3}$, on a $|S_{2N} - S| \leq 10^{-3}$. Or

$$\frac{1}{4N+3} \leq 10^{-3} \iff 4N+3 \geq 1000 \iff N \geq 250 - 3/4 \iff N \geq 250.$$

Donc $\boxed{N = 250}$ convient.

5. *Un critère de D'Alembert* : soit u une suite de termes strictement positifs telle que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n \geq 0}$ converge vers un certain réel $l > 1$.

- (a) On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq l - \varepsilon$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ en prenant $\varepsilon < l - 1$ (par exemple $\frac{l-1}{2}$). Ainsi, il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$.

- (b) En particulier la suite u est croissante à partir de n_0 , donc $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$. Donc si u converge vers l , par passage à la limite, on a $l \geq u_{n_0} > 0$, donc u ne peut converger vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

III Pour terminer

Exercice 3 (Nombres de Liouville) Un nombre complexe a est dit algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers tel que $P(a) = 0$. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant. On peut si besoin noter $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers. Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe des nombres transcendants.

1. Justifier que les nombres $\sqrt{2}$ et $j = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ sont algébriques.

On a $i^2 = -1$ et $j^3 = 1$, donc i et j sont racines des polynômes $P = X^2 + 1$ et $Q = X^3 - 1$ qui sont bien à coefficients entiers.

La série $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ converge (inutile de le démontrer), on note alors x sa somme que l'on appelle nombre de Liouville :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}.$$

Nous allons démontrer que le nombre x est transcendant, résultat démontré par Liouville en 1874.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. Démontrer alors que :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

Soit $x, y \in I$ avec $x \geq y$ par exemple. On a

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t) dt \right| \leq \int_y^x |f'(t)| dt \leq \int_y^x k dt = k(x - y) = k |x - y|.$$

3. Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré $m \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ une racine de P . Dédurre du résultat précédent qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ qui n'est pas racine de P et vérifie $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq 1$, on a :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{K}{q^m}.$$

La fonction $t \mapsto P'(t)$ est continue sur le segment $[x - 1, x + 1]$, donc elle y est bornée par un réel $k > 0$.

Soit $\frac{p}{q}$ un rationnel qui n'est pas racine de P et qui vérifie $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq 1$. On a alors $\frac{p}{q} \in [x - 1, x + 1]$. D'après l'inégalité des accroissements finis (question précédente), appliquée à P qui est bien de classe C^1 sur $I = [x - 1, x + 1]$ on a :

$$\begin{aligned} \left| P(x) - P\left(\frac{p}{q}\right) \right| &\leq k \left| x - \frac{p}{q} \right| \\ \Rightarrow \left| x - \frac{p}{q} \right| &\geq \frac{\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right|}{k} \end{aligned}$$

Or comme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$ est à coefficients entiers de degré m , on a

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_0q^m + a_1pq^{m-1} + a_2p^2q^{m-2} + \dots + a_{m-1}p^{m-1}q + a_mp^m}{q^m} = \frac{A}{q^m}.$$

avec A qui est un entier. De plus A est non nul car $\frac{p}{q}$ n'est pas racine de P . Ainsi $|A| \geq 1$ et donc :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{|A|}{q^m k} = \frac{1}{kq^m}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^{k!}}$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x - s_n| \leq \frac{1}{10^{n \times n!}}.$$

$$\text{On a } |x - s_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k \times (k-1)!}}.$$

Pour $k \geq n+1$, on a $k-1 \geq n$ et donc $(k-1)! \geq n!$ et donc $k \times (k-1)! \geq kn!$. On en déduit que

$$\frac{1}{10^{k \times (k-1)!}} \leq \frac{1}{10^{kn!}} = \frac{1}{(10^{n!})^k}.$$

Ainsi par somme géométrique de raison $\frac{1}{10^{n!}} \in [0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} |x - s_n| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(10^{n!})^k} = \frac{\frac{1}{(10^{n!})^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10^{n!}}} \\ &= \frac{1}{(10^{n!})^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^{n!}}} \\ &= \frac{1}{(10^{n!})^n} \times \underbrace{\frac{1}{10^{n!} - 1}}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{1}{10^{n \times n!}} \end{aligned}$$

5. Conclure que le nombre x est transcendant.

Supposons que x est algébrique, alors il existe un polynôme P à coefficients entiers de degré $m \geq 1$ tel que $P(x) = 0$. Comme P n'admet qu'un nombre fini de racines, il existe $r > 0$ tel que P ne s'annule pas sur l'intervalle $[x - r, x + r]$. On peut choisir $r < 1$.

Comme la suite (s_n) converge vers x , $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - s_n| \leq r$. Ainsi pour $n \geq n_0$, le rationnel s_n est dans l'intervalle $[x - r, x + r]$, donc il n'est pas racine de P et il est donc aussi dans $[x - 1, x + 1]$ (car on a choisi $r < 1$). De plus s_n est de la forme $\frac{p_n}{10^{n!}}$ avec p_n un entier, donc d'après la question 3, il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|x - s_n| \geq \frac{K}{(10^{n!})^m}$.

Mais alors par la dernière question, on a pour $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{10^{n \times n!}} \geq \frac{K}{(10^{n!})^m} \implies (10^{n!})^{m-n} \geq K \implies (10^{n!})^{n-m} \leq \frac{1}{K}$$

C'est impossible car le premier membre tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin de l'énoncé¹

1. **Bonus** : soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}$.