

Corrigé du CONCOURS BLANC n°1
MATHÉMATIQUES
jeudi 9 janvier 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h

Professeur : M. de Saint Julien

Les calculatrices sont interdites.

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 (Point fixe d'une fonction) Si f est une fonction réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle point fixe de f tout réel a de A tel que $f(a) = a$. Les questions peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Déterminer les points fixes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

On doit résoudre l'équation

$$f(x) = x \iff x^3 - 3x^2 + 3x = x \iff x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \iff x(x^2 - 3x + 2) = 0 \iff x(x-1)(x-2) = 0$$

Les points fixes de f sont donc 0, 1 et 2.

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$. Démontrer que f admet un point fixe. Est-il unique ?

On va s'intéresser à la distance entre x et $f(x)$. On pose pour $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(x) - x$. Il suffit donc de montrer que g s'annule. Or $g(0) = f(0) \in [0, 1]$, donc $g(0) \geq 0$. On a aussi $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0, 1]$, donc la fonction continue g change de signe sur $[0, 1]$, donc s'y annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ce point fixe n'est pas unique, puisque si f est par exemple la fonction identité $x \mapsto x$, tout point de $[0, 1]$ est point fixe.

3. La fonction $\exp$ n'admet pas de point fixe comme on peut le deviner graphiquement. Pour le prouver, il suffit de penser à l'inégalité suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq x + 1 > x$.
4. On note u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \exp(u_n)$. La suite u est-elle convergente ? Justifier votre réponse, puis déterminer sa limite.

Si u converge vers l , alors d'après le cours, l est un point fixe de $\exp$ (car $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$). Comme $\exp$ n'admet pas de point fixe, on en déduit que u diverge. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \exp(u_n) \geq u_n + 1 > u_n$, donc u est croissante, mais diverge, donc u tend vers $+\infty$.

Exercice 2 On note $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Déterminer le ou les antécédents éventuels du nombre -1 par f . L'application f est-elle injective ?

Cela revient à résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $(E) : z + \frac{1}{z} = -1$. En multipliant par $z \neq 0$, on obtient que :

$$(E) \iff z^2 + 1 = -z \iff z^2 + z + 1 = 0 \iff z = j \text{ ou } z = \bar{j}.$$

L'application f n'est donc pas injective puisque -1 admet deux antécédents par $f : j$ et $\bar{j}$.

2. Démontrer que f est surjective.

Soit $a \in \mathbb{C}$. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $(E) : z + \frac{1}{z} = a$. En multipliant par $z \neq 0$, on obtient que :

$$(E) \iff z^2 + 1 = az \iff z^2 - az + 1 = 0.$$

Or une équation de degré 2 admet toujours une solution dans $\mathbb{C}$. Comme 0 n'est pas solution de (E) , cette solution est dans $\mathbb{C}^*$, ce qui montre que f est surjective.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit sous forme algébrique $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer l'écriture algébrique de $f(z)$, en déduire que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U}).$$

En multipliant par le conjugué de z , on a $\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$, donc :

$$f(z) = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(y + \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \iff y + \frac{-y}{x^2 + y^2} = 0 \\ &\iff \frac{y(x^2 + y^2) - y}{x^2 + y^2} = 0 \\ &\iff y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ &\iff y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1 \end{aligned}$$

4. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

On a

$$\begin{aligned} f(\mathbb{U}) &= \{f(e^{i\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^{i\theta} + e^{-i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{2\cos\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= [-2, 2] \end{aligned}$$

II Problème : une introduction aux séries

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels, on appelle **série** de terme général u_n , la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On note $\sum_{n \geq 0} u_n$ cette série au lieu de $(S_n)_{n \geq 0}$. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge. Dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa limite, on dit que c'est la somme de la série :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Donner la nature d'une série, c'est indiquer si elle converge ou non. Ce problème propose une introduction à la notion de séries.

1. Deux exemples :

(a) Pour $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ qui tend vers $\frac{3}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

(b) Pour $n \geq 1$, par télescopage, on a $\sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1)$ qui tend vers $+\infty$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} \ln(n+1) - \ln n$ diverge.

2. Condition nécessaire de convergence :

(a) Pour tout $n \geq 1$, on a $S_n - S_{n-1} = u_n$. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors la suite (S_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (S_{n-1}) converge aussi vers l car extraite de (S_n) . Ainsi par différence, $S_n - S_{n-1} = u_n$ tend vers $l - l = 0$.

(b) On a $n \sin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$. Donc le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

- (c) On a vu que la série $\sum_{n \geq 1} \ln(n+1) - \ln n$ diverge mais $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0.

3. Séries de Riemann :

Soit α un réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et donc $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

- (a) Pour tout $n \geq 1$, on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$, donc la suite (S_n) est croissante .
 (b) Pour $\alpha \leq 0$, la suite $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 (pour $\alpha = 0$ elle vaut 1, pour $\alpha < 0$ elle tend vers $+\infty$), donc d'après la question **3.a**, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(c) Un calcul montre que :

- si $\alpha = 1$, alors $I_n = \ln(n+1) - \ln 1$ qui tend vers $+\infty$.
- si $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, on a $I_n = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \right)$.
 Si $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha - 1 < 0$, donc I_n tend vers $+\infty$.
 Si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$ et $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ tend vers 0, donc I_n tend vers $\frac{1}{\alpha-1}$.

(d) Soit $k \geq 1$, par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, puis en intégrant on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \\ \int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^\alpha} &\leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^\alpha} \\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \end{aligned}$$

On somme maintenant les inégalités de $k = 1$ à $k = n$ à $k = n$ (pour $n \geq 1$), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \\ S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^\alpha} &\leq I_n \leq S_n \end{aligned}$$

On en déduit que pour $n \geq 1$,

$$I_n \leq S_n \leq I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

- (e) Pour $\alpha \in]0, 1]$, on a $S_n \geq I_n$ avec I_n qui tend vers $+\infty$. On en déduit par comparaison que la suite (S_n) tend aussi vers $+\infty$.

Pour $\alpha > 1$, on a $S_n \leq I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. Or $I_n + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ a une limite finie, donc en particulier est bornée, ce qui prouve que la suite (S_n) est majorée. Comme elle est de plus croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Conclusion : la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4. Critère pour des séries alternées :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ car la suite (a_n) décroît. Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.

- (b) De même, $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}a_{2n+3} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$ car la suite (a_n) décroît. Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante. Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ tend vers 0 car la suite (a_n) tend vers 0 donc la suite extraite (a_{2n+1}) aussi.

Conclusion : les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite, et donc par théorème, la suite (S_n) est convergente, *i.e.* la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

- (c) On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge car la suite $(\frac{1}{2n+1})$ décroît et tend vers 0. .
- (d) On note S la somme de la série précédente, c'est-à-dire $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Comme les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, on a pour tout n , $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |S_{2n} - S| \leq |S_{2n+1} - S_{2n}| = \frac{1}{2(2n+1)+1} = \frac{1}{4n+3}.$$

En particulier, si $\frac{1}{4N+3} \leq 10^{-3}$, on a $|S_{2N} - S| \leq 10^{-3}$. Or

$$\frac{1}{4N+3} \leq 10^{-3} \iff 4N+3 \geq 1000 \iff N \geq 250 - 3/4 \iff N \geq 250.$$

Donc $\boxed{N = 250}$ convient.

5. *Un critère de D'Alembert* : soit u une suite de termes strictement positifs telle que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n \geq 0}$ converge vers un certain réel $l > 1$.

- (a) On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq l - \varepsilon$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ en prenant $\varepsilon < l - 1$ (par exemple $\frac{l-1}{2}$). Ainsi, il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$.

- (b) En particulier la suite u est croissante à partir de n_0 , donc $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$. Donc si u converge vers l , par passage à la limite, on a $l \geq u_{n_0} > 0$, donc u ne peut converger vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

III Pour terminer

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \sin^{n+1}(x)$.

1. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $(1 + \frac{1}{n})^n$.

On a $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n}))$. De plus $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, donc par produit d'équivalents $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{n}{n} = 1$. D'où par composée de limites, on a $(1 + \frac{1}{n})^n$ qui tend vers e .

2. Justifier que f_n est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis montrer que la dérivée f'_n admet un maximum en $x = \arctan \sqrt{n}$. On note alors M_n la valeur maximale de f'_n .

La fonction f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. On a pour tout réel x , $f'_n(x) = (n+1) \sin^n x \cos x$ et

$$f''_n(x) = (n+1) \left(n \sin^{n-1}(x) \cos^2 x - \sin^{n+1}(x) \right) = (n+1) \sin^{n-1}(x) (n \cos^2 x - \sin^2 x).$$

Ainsi pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} f''_n(x) = 0 &\iff (\sin^{n-1}(x) = 0 \quad \text{ou} \quad n \cos^2 x - \sin^2 x = 0) \\ &\iff \sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = n \quad \text{et} \quad \cos^2 x \neq 0 \right) \quad \text{ou} \quad \underbrace{(\sin^2 x = 0 \quad \text{et} \quad \cos^2 x = 0)}_{\text{impossible}} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad (\tan^2 x = n \quad \text{et} \quad x \neq \frac{\pi}{2}) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad (\tan x = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad x \neq \frac{\pi}{2}) \quad \text{car} \quad \tan \geq 0 \quad \text{sur} \quad [0, \frac{\pi}{2}[\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \arctan \sqrt{n} \end{aligned}$$

De plus pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned} f''_n(x) \geq 0 &\iff n \cos^2 x - \sin^2 x \geq 0 \\ &\iff \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \leq n \\ &\iff \tan x \leq \sqrt{n} \\ &\iff x \leq \arctan \sqrt{n} \end{aligned}$$

On a donc le tableau suivant qui permet de conclure.

x	0	$\arctan \sqrt{n}$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	0	+	0
$f'(x)$		M_n	

3. Déterminer une forme simple de $\cos(\arctan t)$ et $\sin(\arctan t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On sait que $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$, donc $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$. Ainsi

$$\cos^2(\arctan t) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan t)} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Comme $\arctan t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\cos \geq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que $\cos(\arctan t) \geq 0$ et donc que

$$\cos(\arctan t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Enfin, comme $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on a $\sin = \pm\sqrt{1 - \cos^2}$, donc

$$\sin(\arctan t) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}} = \pm\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}.$$

La fonction $t \mapsto \sin(\arctan t)$ est impaire et positive sur $\mathbb{R}^+$ car $\sin \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(\arctan t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$M_n = \sqrt{\frac{n+1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}}.$$

On a

$$\begin{aligned} M_n &= f'_n(\arctan \sqrt{n}) \\ &= (n+1) \sin(\arctan \sqrt{n})^n \cos(\arctan \sqrt{n}) \\ &= (n+1) \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}} \right)^n \frac{1}{\sqrt{1+n}} \\ &= \sqrt{n+1} \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}} \end{aligned}$$

Donner enfin un équivalent simple de M_n pour n au voisinage de $+\infty$.

On en déduit que $M_n \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e}}$.