**Année scolaire 2024-2025** **MPSI**

**Corrigé du DS de MATHÉMATIQUES n°4**
**Samedi 14 décembre 2024**

*Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00*
*Professeur : M. de Saint Julien*
*Les calculatrices sont interdites.*
*Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

# I Exercices

**Exercice 1** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x$.

Puisque $P = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, les solutions de l'équation homogène sont des combinaisons linéaires de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$. Le second membre est de la forme $e^{mx}$ avec $m = 1$ racine simple de $P$, on cherche donc une solution particulière de $(E)$ sous la forme $y_p(x) = ax\mathrm{e}^x$. On trouve par calcul $a = -1$. Les solutions de $(E)$ sont donc les fonctions de la forme :

$$y(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 2** Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + 3.$$

Déjà fait en classe. Analyse : si $f$ est solution, alors $f$ est dérivable car $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable d'après le TFA (théorème fondamental de l'analyse) puisque $f$ est continue. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(x)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\mathrm{e}^{2x}$. De plus en évaluant l'équation en $x = 0$, on a $f(0) = 3$, donc $\lambda = 3$.

Synthèse : réciproquement, on vérifie que la fonction $x \mapsto 3\mathrm{e}^{2x}$ est bien solution.

**Exercice 3** Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

**1.** Démontrer que si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.

**2.** La réciproque est-elle vraie ?

**3.** Démontrer que si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.

**Exercice 4** On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x-3)^2 + 1 + y^2$.

**1.** L'application $f$ est-elle injective, surjective ?

On a $f(0, 1) = f(0, -1)$ donc $f$ n'est pas injective.

On remarque que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) \geqslant 1$, donc par exemple le nombre $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédents par $f$.

**2.** Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

On a déjà vu que $f(\mathbb{R}^2) \subset [1, +\infty[$.

Réciproquement soit $a \in [1, +\infty[$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = (x-3)^2 + 1 + y^2$. On prend $x = 3$ et $y = \sqrt{a-1}$. On a alors $a = f(x, y)$.

On a donc montré que $f(\mathbb{R}^2) = [1, +\infty[$.

**3.** Dessiner $f^{-1}(\{5\})$.

On a

$$(x, y) \in f^{-1}(\{5\}) \iff f(x, y) = 5 \iff (x-3)^2 + y^2 = 2^2.$$

C'est donc le cercle de centre $\Omega(3, 0)$ et de rayon 2.

**Exercice 5 (un vrai-faux)** Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

**1.** Si une suite converge vers 1, à partir d'un certain rang, tous ses termes sont supérieurs à $0,999$.

VRAI : pour $\varepsilon = 0.001$, il existe un entier $n_0$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - 1| \leqslant \varepsilon$ donc $u_n \geqslant 1 - \varepsilon = 0.999$.

**2.** On a $\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = 1$.

FAUX : On écrit $u_n = \exp(n \ln(1 - \frac{1}{n}))$. Comme $\ln(1+x) \sim_0 x$ et que $\frac{-1}{n}$ tend vers 0, on a $\ln(1 - \frac{1}{n}) \sim \frac{-1}{n}$, donc par produit d'équivalents $n \ln(1 - \frac{1}{n}) \sim n \times \frac{-1}{n} = -1$, donc par composée de limites $\lim u_n = \exp(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

**3.** Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite $u$ converge.

FAUX : prendre $u_n = n$.

# II Problème : Irrationnalité du nombre e

On note $u$ et $v$ les suites de terme général $u_n$ et $v_n$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

## 1 Convergence rapide de la suite $u$

**1.** Pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, donc $u$ est strictement croissante. De plus pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n)!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!}.$$

Pour $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et pour $n \geqslant 2$, $v_{n+1} - v_n < 0$. Ainsi $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ strictement décroissante.

**2.** Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont donc monotones de sens contraire, de plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ tend vers 0, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et convergent vers donc une même limite $l$.

**3.** *Valeurs approchées de* $l$ :

**(a)** Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes avec $u$ croissante et $v$ décroissante, on a pour $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$ donc $0 \leqslant l - u_n \leqslant v_n - u_n = \frac{1}{n!}$, ce qui montre que

$$|u_n - l| \leqslant \frac{1}{n!}.$$

**(b)** Il suffit de chercher un entier $n$ tel que $\frac{1}{n!} \leqslant 10^{-2}$, donc $n! \geqslant 10^2$. Comme $5! = 120$, l'entier $N = 5$ convient.

**(c)** On a $u_3 = \frac{16}{6}$ et $v_3 = \frac{17}{6}$. On a donc $\frac{16}{6} \leqslant l \leqslant \frac{17}{6}$ et $l$ n'est pas un entier.

## 2 Qui est vraiment ce nombre $l$ ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t}{n!}$.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant (1-t)^n \leqslant 1$ et $0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}$ donc

$$0 \leqslant I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

On en déduit par le théorème des gendarmes que $(I_n)$ tend vers 0.

**5.** On note $\mathrm{e} = \exp(1)$. On fait une récurrence sur $n$.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e} - u_0$.

Supposons que c'est vrai au rang $n$. On calcule $I_{n+1}$ à l'aide d'une IPP. On pose $u(t) = (1-t)^{n+1}$ donc $u'(t) = (n+1)(1-t)^n \times (-1)$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$ donc $v(t) = \mathrm{e}^t$. On a alors

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[\mathrm{e}^t(1-t)^{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (n+1)(1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-1}{(n+1)!} + I_n \\
&= \frac{-1}{(n+1)!} + e - u_n \quad \text{d'après } HR(n) \\
&= \mathrm{e} - u_{n+1}
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'hérédité. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \mathrm{e} - u_n.$$

**6.** On passe à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient $0 = \mathrm{e} - l$, d'où $l = e$.

# III Pour terminer

**Exercice 6 (Grands dénominateurs)** Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers strictement positifs. telles que la suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre irrationnel. Le but de l'exercice est de démontrer que la suite $(q_n)_n$ des dénominateurs tend vers $+\infty$.

Pour la preuve nous raisonnons par l'absurde, nous supposons donc que $(q_n)$ ne tend pas $+\infty$.

**1.** Soit $(u_n)$ une suite d'entiers. Démontrer que si $u$ converge, alors elle est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n_0$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} = u_n$.

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|u_n - l| < \varepsilon$.

D'où

$$\forall n \geqslant n_0, |u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - l + l - u_n| \leqslant |u_{n+1} - l| + |l - u_n| < 2\varepsilon = 1.$$

Or $|u_{n+1} - u_n|$ est un entier naturel inférieur à 1, il est donc nul.

**2.** Comme $(q_n)$ ne tend pas vers $+\infty$, on a la relation suivante :

$$(\star) \quad \exists A > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p,\ q_n \leqslant A.$$

**3.** Pour $p = 0$, on obtient

$$\exists \phi(0) \geqslant 0,\ q_{\phi(0)} \leqslant A.$$

Notons $HR(n)$ la proposition suivante : «il existe des entiers naturels $\phi(0) < \phi(1) < \ldots < \phi(n)$ tels que $\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ q_{\phi(k)} \leqslant A$.»

On va montrer par récurrence que la propriété $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Déjà on a vu que $HR(0)$ est vraie.

Supposons que $HR(n)$ est vraie. On prend $p = \phi(n) + 1$ dans $(\star)$, ce qui donne

$$\exists \phi(n+1) \geqslant \phi(n) + 1,\ q_{\phi(n+1)} \leqslant A.$$

Or $\phi(n+1) \geqslant \phi(n) + 1 > \phi(n) > \ldots > \phi(0)$ d'après $HR(n)$, ce qui prouve $HR(n+1)$ et achève la récurrence.

La suite d'entiers naturels $(\phi(n))_n$ est donc strictement croissante, et ainsi la suite$(q_{\phi(n)})$ est une suite extraite de $(q_n)$ qui est majorée par $A$.

Nous avons donc construit une suite extraite $(q_{\phi(n)})$ de $(q_n)$ qui est majorée.

**4.** En déduire que la suite $(p_{\phi(n)})$ est bornée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{\phi(n)} = q_{\phi(n)} \dfrac{p_{\phi(n)}}{q_{\phi(n)}}$.

La suite $\left(\frac{p_{\phi(n)}}{q_{\phi(n)}}\right)$ est extraite de la suite convergente $(\dfrac{p_n}{q_n})$, elle est donc aussi convergente et donc bornée. De plus la suite $(q_{\phi(n)})$ est aussi bornée car majorée par $A$ et minorée par 0. On en conclut que la suite $(p_{\phi(n)})$ est bornée comme produit de deux suites bornées.

**5.** Conclure.

Les suites d'entiers $(p_{\phi(n)})$ et $(q_{\phi(n)})$ sont bornées donc elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Leur quotient ne prend donc aussi qu'un nombre fini de valeurs.

D'autre part, la suite $\left(\dfrac{p_{\phi(n)}}{q_{\phi(n)}}\right)$ converge car extraite d'une suite convergente. Comme elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est nécessairement stationnaire. Sa limite est donc un terme de la suite c'est à dire un certain rationnel $\frac{p_{\phi(N)}}{q_{\phi(N)}}$, ce qui est impossible car sa limite est la même que celle de $\frac{p_{\phi(n)}}{q_{\phi(n)}}$ qui converge vers un irrationnel. Contradiction.