Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Corrigé du DS de MATHÉMATIQUES n°3
Samedi 16 novembre 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h00
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices sur les complexes

Exercice 1 (Changer d'écriture) (3 points) On pose $Z = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{1-i}$.

1. On a $Z = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{1-i} = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(1+i)}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$.

2. Le module de $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})$ vaut $\frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \sqrt{2}$. On note θ un de ses arguments. On a $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. D'où $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}}}$. De même $\boxed{1-i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}}$.

Ainsi $Z = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}-\frac{-i\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{i5\pi}{12}}$. D'où $\boxed{Z = \mathrm{e}^{\frac{i5\pi}{12}}}$.

3. En prenant les parties réelles de l'écriture algébrique et de l'écriture exponentielle de Z, on a

$$\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

Exercice 2 (Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{5})$) On pose $S = \sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}$.

Pour $k \in \{,\dots,4\}$, on pose $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$.

1. Démontrer que $S = 0$.

C'est une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$. Ainsi

$$S = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1-\mathrm{e}^{i2\pi}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = 0.$$

2. Déterminer un réel a tel que $S = 1 + a\cos(\frac{2\pi}{5}) + a\cos(\frac{4\pi}{5})$.

Un schéma permet de pressentir, que w_1 et w_4 sont conjugués ainsi que w_2 et w_3. Les calculs suivants le prouvent.

On a

$$\begin{array}{rcl} w_1 &=& \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}} \\ w_2 &=& \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}} \\ w_3 &=& \mathrm{e}^{\frac{6i\pi}{5}} = \mathrm{e}^{i(\frac{6\pi}{5}-2\pi)} = \mathrm{e}^{i(\frac{6\pi}{5}-\frac{10\pi}{5})} = \mathrm{e}^{-i(\frac{4\pi}{5})} \\ w_4 &=& \mathrm{e}^{\frac{8i\pi}{5}} = \mathrm{e}^{i(\frac{8\pi}{5}-2\pi)} = \mathrm{e}^{i(\frac{8\pi}{5}-\frac{10\pi}{5})} = \mathrm{e}^{-i(\frac{2\pi}{5})} \end{array}$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl} 1 + w_1 + w_1^2 + w_1^3 + w_1^4 &=& 1 + \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}} + \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-i(\frac{4\pi}{5})} + \mathrm{e}^{-i(\frac{2\pi}{5})} \\ &=& 1 + \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-i(\frac{2\pi}{5})}} + \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-i(\frac{4\pi}{5})}} \\ &=& 1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 2\cos\dfrac{4\pi}{5} \\ &=& 1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 2\cos(2\times\dfrac{2\pi}{5}) \\ &=& 1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 2\left(2\cos^2\dfrac{2\pi}{5} - 1\right) \\ &=& 1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 4\cos^2\dfrac{2\pi}{5} - 2 \\ &=& -1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 4\cos^2\dfrac{2\pi}{5} \end{array}$$

Ceci montre d'après la question 1. que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une racine du polynôme $4X^2 + 2X - 1$.

Or ce polynôme a pour racines $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Mais $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ tandis que $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ car $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi on a

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}.$$

Exercice 3 On pose

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}.$$

1. Soit z et z' dans G. démontrer que $zz' \in G$.

2. Soit z et z' dans G. A-t-on $z + z' \in G$?

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$z \in G \iff \exists r \in \mathbb{Q}, z = \mathrm{e}^{ir\pi}.$$

II Un Problème

Exercice 4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer un réel $K \in [0,1[$ tel que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}], \sin x \leqslant K$. Puisque sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, ce réel est $K = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2\pi}{3}K^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, on a $0 \leqslant \sin x \leqslant K$, d'où par produit de n inégalités (où par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$), on a : $0 \leqslant \sin^n x \leqslant K^n$. De plus cos étant décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, on a $\cos(x) \geqslant \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, d'où $0 \leqslant \frac{1}{\cos(x)} \leqslant 2$. Ainsi pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, on a $0 \leqslant \frac{\sin^n x}{\cos x} \leqslant 2K^n$. On en déduit par croissance de l'intégrale que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2K^n\,\mathrm{d}x = 2K^n\frac{\pi}{3}.$$

Comme la suite géométrique (K^n) tend vers 0 puisque sa raison $K \in [0,1[$, la suite (u_n) converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

On pose pour $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

3. Déterminer la monotonie de la suite (S_n), puis démontrer qu'elle est convergente. On note S sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$, donc (S_n) est croissante. Pour montrer qu'elle converge, il suffit donc de prouver qu'elle est majorée. D'après la question précédente, on a en reconnaissant une somme géométrique de raison $K \in [0,1[$:

$$S_n \leqslant \frac{2\pi}{3}\sum_{k=0}^{n} K^k = \frac{2\pi}{3}\frac{1-K^{n+1}}{1-K} \leqslant \frac{2\pi}{3}\frac{1}{1-K}.$$

La dernière inégalité est vraie car $1 - K^{n+1} < 1$ et $\frac{1}{1-K} > 0$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1-\sin x)} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x.$$

On a par linéarité, puis avec une somme géométrique de raison $\sin x \neq 1$ car $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\sum_{k=0}^{n}\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\frac{1-\sin^{n+1}(x)}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1-\sin x)} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

5. En déduire que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1-\sin x)}$.

D'après la question précédente, il suffit de montrer que la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x$. M converge vers 0.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant K^{n+1} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x}_{M}$$

Or M ne dépend pas de n (inutile de le calculer), donc (I_n) tend vers 0.

6. Démontrer que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2(u+1)}$.

Il suffit de faire le changement de variable $u = \sin x$. On a $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$, d'où «formellement»

$$\frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x(1-\sin x)} = \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(1-\sin^2 x)(1-\sin x)} = \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1-u)} = \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(1-u)^2}$$

7. Déterminer des réels a, b et c tels que :

$$\forall u \in [0,1[, \quad \frac{1}{(u-1)^2(u+1)} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u-1)^2} + \frac{c}{u+1}.$$

Si on pose $F(u) = \frac{1}{(u-1)^2(u+1)}$, on a $c = \lim_{u\to-1}(u+1)F(u) = \lim_{u\to-1}\frac{1}{(u-1)^2} = \frac{1}{4}$.

On a aussi $b = \lim_{u\to1}(u-1)^2F(u) = \lim_{u\to1}\frac{1}{u+1} = \frac{1}{2}$.

En fin en évaluant en 0, on a $F(0) = 1 = a - b + c$, d'où $b = \frac{3}{4} - 1 = \frac{-1}{4}$.

8. En déduire une primitive sur $[0,1[$ de $u \mapsto \frac{1}{(u-1)^2(u+1)}$ (on donnera la réponse en fonction des réels a, b et c).

Une primitive recherchée est donc :

$$u \mapsto a\ln|u-1| - \frac{b}{u-1} + c\ln|u+1|$$

On a donc $S = a[\ln|u-1|]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - b[\frac{1}{u-1}]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c[\ln|u+1|]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

On peut ainsi avoir la valeur exacte de S (calcul non demandé).

III Pour terminer

Exercice 5 On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. On effectue une IPP : on pose $u(x) = (1-x^2)^n$ donc $u'(x) = n(1-x^2)^{n-1} \times (-2x)$ et $v'(x) = 1$ donc $v(x) = x$. On a donc

$$\begin{aligned}
I_n &= \underbrace{\Big[(1-x^2)^n \times x\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}(-2n)x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}(x^2-1+1)\,\mathrm{d}x \\
&= 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}(x^2-1)\,\mathrm{d}x + 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -2nI_n + 2nI_{n-1}
\end{aligned}$$

On en déduit que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ et donc $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$.

2. Ainsi par récurrence immédiate, on a

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times I_1 \\
&= \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)} \\
&= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n \times \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)}{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n) \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)} \\
&= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n \times \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)}{(2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 2n \times 2n+1)} \\
&= \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2^n(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n))^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

3. En effectuant le changement de variable $x = \sin t$, on a $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t))^n \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x.$$

IV Pour les très rapides...