Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Corrigé du DS n°11
samedi 14 juin 2025

Durée de l'épreuve : 2 heures
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1 (Vrai ou Faux) Répondez par vrai ou par faux en justifiant bien vos affirmations. Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $n \geq 2$,

1. $\sigma_0 = (1427)(58)$ et $\epsilon(\sigma_0) = 1$.
VRAI : $\sigma_0 = (1427)(58) = (14)(42)(27)(58)$ et donc $\epsilon(\sigma_0) = (-1)^4 = 1$

2. Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors N n'est pas inversible.
VRAI : $\exists p \in \mathbb{N}^*, N^p = 0$ donc $\det(N^p) = 0$, or $\det(N^p) = \det(N)^p$ donc $\det(N) = 0$ et alors N n'est pas inversible.

3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
FAUX : Prenons $A = I_n$,$B = -I_n$, cela donne : $\det(I_n - I_n) = 0$ or $\det(I_n) + \det(-I_n) = 1 + (-1)^n \neq 0$ pour n impair par exemple.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: (il existe $X \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $AX = 0$) $\Leftrightarrow$ $(\det(A) = 0)$.
VRAI : (Il existe $X \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $AX = 0$) $\Leftrightarrow Ker(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow A \notin \mathbb{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) = 0$

Exercice 2 (Inversibilité d'une matrice) Soit $a \in \mathbb{C}$, on pose $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, -1, a)$ et $w = (0, a, a + 1)$.

On note $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $M_a = \begin{pmatrix} 2a-1 & 3 & 2-a \\ 1 & a-1 & 2a+1 \\ a+1 & 2a & 3a+3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

1. Pour quelles valeurs de a la famille (u, v, w) forme une base de $\mathbb{C}^3$?

On écrit la matrice de la famille (u, v, w) : $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} =_{L_1 \leftrightarrow L_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} =_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1+a & -a^2 \\ 0 & 1+a & 1 \end{vmatrix}$$

$$=_{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1+a & -a^2 \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{vmatrix} = -(1+a)(1+a^2)$$

Ainsi $\det(A) = -(1 + a)(1 + a^2)$ donc $\det(A) = 0 \Leftrightarrow (a = -1$ ou $a = i$ ou $a = -i)$
La famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{C}^3$ si et seulement si $a \notin \{-1, i, -i\}$

2. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det_\beta(2u-v, v+w, u+v+2w) = \lambda \det_\beta(u,v,w)$.

On développe par trilinéarité et on simplifie ou le même vecteur apparaît au moins 2 fois (caractère alterné). Cela donne :
$\det_\beta(2u-v, v+w, u+v+2w) = 4\det_\beta(u,v,w) + 2\det_\beta(u,w,v) - \det_\beta(v,w,u) = \det_\beta(u,v,w)$ par antisymétrie, finalement $\lambda = 1$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que $M_a \in \mathbb{GL}_3(\mathbb{R})$.

Écrivons la matrice de la famille $(2u-v, v+w, u+v+2w)$: $B = \begin{pmatrix} 2a-1 & 1 & a+1 \\ 3 & a-1 & 2a \\ 2-a & 2a+1 & 3a+3 \end{pmatrix}$

On remarque que $B = M_a^T$,
donc $\det(M_a) = \det(B) = \det_\beta(2u-v, v+w, u+v+2w) = \det_\beta(u,v,w)$
Ainsi d'après la question 1, $M_a \in \mathbb{GL}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $a \neq -1$

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

1. Soit A et B deux évènements. On a $(A\cap B) \cup ()A \cap \overline{B}) = A$, et cette réunion est disjointe, donc $P(A) = P(A\cap B) + P(A \cap \overline{B})$ et donc

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

2. On a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(X = k) = P(X \leqslant k \quad \text{et} \quad X > k-1) = P((X > k-1) \cap \overline{X > k}) = \mathrm{P}(X > k-1) - \mathrm{P}((X > k) \cap (X > k-1)) = \mathrm{P}(X > k-1) - \mathrm{P}(X > k)$.

3. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\mathrm{P}(X > k-1) - \mathrm{P}(X > k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[k\mathrm{P}(X > k-1) - (k+1)\mathrm{P}(X > k) + \mathrm{P}(X > k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X > k) + \sum_{k=0}^{n} \left[k\mathrm{P}(X > k-1) - (k+1)\mathrm{P}(X > k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X > k) - (n+1)\mathrm{P}(X > n) && \text{(lien suite-série)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k) - n\mathrm{P}(X > n).
\end{aligned}$$

4. On a : $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si l'on note X_i le résultat du i^{e} tirage pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, alors on a :

$$(X \leqslant k) = \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant p} X_i \leqslant k\right) = \bigcap_{i=1}^{p} (X_i \leqslant k).$$

Comme les X_i sont indépendantes (c'est en tout cas une hypothèse raisonnable, au vu de l'expérience modélisée), on a :

$$\mathrm{P}(X \leqslant k) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{P}(X_i \leqslant k).$$

Comme les X_i suivent une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (en effet le tirage est supposé équiprobable), on conclut :
$$\mathrm{P}(X \leqslant k) = \prod_{i=1}^{p} \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$
Remarquons que cette expression reste valable pour $k=0$. La loi de X s'obtient en écrivant :
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(X \leqslant k) - \mathrm{P}(X \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p.$$

5. L'application $x \mapsto x^p$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc par le théorème sur les sommes de Riemann on a directement :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1},$$
Or par la question 3, puisque $P(X>n)=0$, on a :
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X>k) - nP(X>n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X>k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (1-\mathrm{P}(X \leqslant k)) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X \leqslant k).
\end{aligned}$$
Par la question précédente : $\mathrm{E}(X) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = n\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right)$. Puisque $p \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{2} < 1$, et donc par ce qui précède :
$$\mathrm{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(1-\frac{1}{p+1}\right).$$

Exercice 4 (Marche aléatoire) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P). On suppose qu'elles sont indépendantes et qu'elles suivent la même loi définie par :
$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$
On pose :
$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$
Soit $t > 0$ un réel.

1. Démontrer que $E(\exp(tS_n)) = \operatorname{ch}(t)^n$.

Remarquons déjà que par le théorème de transfert, $E(\mathrm{e}^{tX_1}) = \mathrm{e}^{-t}P(X_1 = -1) + \mathrm{e}^{t}P(X_1 = 1) = \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{t}\frac{1}{2} = \operatorname{ch}(t)$.

Ensuite, comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables $\mathrm{e}^{tX_1}, \dots, \mathrm{e}^{tX_n}$ sont indépendantes, et donc

$$E(\exp(tS_n)) = E(\mathrm{e}^{tX_1} \times \cdots \times \mathrm{e}^{tX_n}) = E(\mathrm{e}^{tX_1}) \times \cdots \times E(\mathrm{e}^{tX_n}) = \operatorname{ch}(t) \times \cdots \times \operatorname{ch}(t) = \operatorname{ch}(t)^n.$$

2. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - t\varepsilon\right).$$

On pourra utiliser librement que pour tout réel x, on a $\operatorname{ch}(x) \leqslant \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Comme $t > 0$, on a $S_n \geqslant \varepsilon \iff tS_n \geqslant t\varepsilon \iff \exp(tS_n) \geqslant \exp(t\varepsilon)$. On en déduit en appliquant l'inégalité de Markov à la variable $\exp(tS_n)$ qui est positive que :

$$P(S_n \geqslant \varepsilon) = P(\exp(tS_n) \geqslant \exp(t\varepsilon)) \leqslant \frac{E(\exp(tS_n))}{\exp(t\varepsilon)} = \frac{(\operatorname{ch} t)^n}{\exp(t\varepsilon)} \leqslant \frac{(\exp(\frac{t^2}{2})^n}{\exp(t\varepsilon)} = \exp\left(\frac{nt^2}{2} - t\varepsilon\right).$$

3. En déduire que $P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2n}\right)$. Il suffit par exemple de choisir $t = \frac{\varepsilon}{n} > 0$ qui réalise un extremum pour le trinôme $t \mapsto \frac{nt^2}{2} - t\varepsilon$.