Année scolaire 2024-2025 **MPSI**

Corrigé du CONCOURS BLANC n°2
MATHÉMATIQUES
jeudi 22 mai 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures de 8h à 12h
Professeur : M. de Saint Julien
Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

I Exercices

Exercice 1 (Étude d'une suite récurrente, extrait des petites mines) Soit f la fonction telle que $f(x)=0$ si $x=0$ et $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon.

1. L'ensemble de définition D de f est $\boxed{[0,1[\cup]1,+\infty[}$.

2. $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{\ln(x)}\to_{x\to 0^+} 0$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0)=0}$.

3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ (quotient).

On a $f'(0)=0$ et pour $x>0$ (et $x\neq 1$) : $f'(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{\ln(x)^2}$.

Donc $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0=f'(0)$. f' est continue en 0.

Donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[}$.

4. $f'(x)=\dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}$ est négative sur $]0,1[\cup]1,\mathrm{e}]$ puis positive.

f est décroissante sur $]0,1[$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

f est décroissante sur $]1,\mathrm{e}[$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$, puis f est croissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0 ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

On note v la suite telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$.

5. On a vu que si $x \geqslant \mathrm{e}$ alors $f(x) \geqslant f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ (autrement dit l'intervalle $[\mathrm{e}, +\infty[$ est stable par f). Comme $v_0 \geqslant \mathrm{e}$, $\boxed{\text{on montre par récurrence que pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant \mathrm{e}.}$

6. $v_n > 0$ et $v_{n+1}/v_n = 1/\ln(v_n) \leqslant 1$ d'après B1). Donc la suite est $\boxed{\text{décroissante, minorée}}$ par e donc la suite v converge et sa limite ℓ supérieure (ou égale) à e.

De plus f est continue sur D donc $\boxed{\ell \text{ est un point fixe de } f}$ or :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \iff x = 0 \text{ ou } \ln x = 1 \iff x = 0 \text{ ou } x = \mathrm{e}.$$

Donc $\boxed{\lim v = \mathrm{e}}$.

7. On a vu $f' \geqslant 0$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. De plus $f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln(x)^3}$ est positive sur $[\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]$ puis positive donc f' admet un maximum en $x = \mathrm{e}^2$. $f'(\mathrm{e}^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ donc $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant \mathrm{e}, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}.}$

Remarque : on peut aussi remarquer que $\frac{1}{4} - f'(x) = \frac{\ln(x)^2 - 4\ln(x) + 4}{4\ln(x)^2} = \frac{(\ln(x)-2)^2}{4\ln(x)^2} \geqslant 0$.

8. D'après 3) et 4), on obtient avec $a = \mathrm{e}, b = v_n$: $0 \leqslant f(v_n) - f(\mathrm{e}) = v_{n+1} - \mathrm{e} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - \mathrm{e})$ donc par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}, |v_n - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}|v_0 - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}|3 - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

9. Sachant que $4^5 > 1000 = 10^3$, on a $4^{20} > 10^{12}$ donc à partir de $\boxed{n_1 = 20}$ on a v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Exercice 2 (Nature de série) Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{2n^3}{n^7+1} \sim \frac{2n^3}{n^7} = \frac{2}{n^4}$. Comme $\sum \frac{1}{n^4}$ est une série à termes positifs convergente, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

2. $u_n = \frac{5+(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui diverge car série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui converge d'après le TCSSA car la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ décroit et tend vers 0. On en déduit que $\sum u_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

3. $u_n = \frac{n^2 \ln n}{4^n}$

On a $\lim n^2 u_n = \lim \frac{n^4 \ln n}{4^n} = 0$ par croissance comparées. On en déduit qu' à partir d'un certain rang n_0, on a $u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ et donc la série $\sum u_n$ converge.

II Problème : réduction des matrices de rang un

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans tout l'exercice M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1, on note $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si, il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 *Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang un sont semblables, si et seulement si, elles ont la même trace.*

1. Exemple en petite taille

Donner, en complétant les coefficients de la matrice suivante $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$,

un exemple de matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans chacun des trois cas suivants :

i) $\operatorname{rang}(A) = 1$, ii) $\operatorname{rang}(A) = 2$, iii) $\operatorname{rang}(A) = 3$.

2. Un exemple : dans cette question uniquement, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) On a $u(1,-1) = 0$ et $u(1,1) = 2(1,1)$. Ainsi dans la base $((1,-1),(1,1))$, la matrice de u est $D = \operatorname{diag}(0,2)$.

(b) Préciser le lien matriciel reliant les matrices A et D. On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. **(a)** Le théorème 1 est-il vrai pour des matrices de rang deux ? Non, car I_2 et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont toutes les deux de rang deux et ont la même trace mais elles ne sont pas semblables.

(b) Le théorème 1 reste-t-il vrai si l'on remplace le mot «semblables» par «équivalentes» ? Non, les matrices élementaires E_{11} et E_{12} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont de rang 1. Elles sont donc équivalentes, mais leur trace est différente.

4. Existence d'un polynôme annulateur

Les colonnes d'une matrice de rang 1 sont toutes proportionnelles à une même colonne, ainsi les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M sont de la forme $\alpha_i\beta_j$ avec α_i et β_j des scalaires dans $\mathbb{K}$.

Déterminer deux matrices colonnes X et Y de taille n telles que $M = XY^\top$. En déduire que

$$M^2 = \lambda M \quad \text{avec } \lambda = \operatorname{Tr}(M).$$

On pose X (resp. Y) la matrice colonne dont les coefficients sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (resp. $b_1, b_2, \ldots, b_n$). On a alors $M = XY^\top$. Ainsi

$$M^2 = X\underbrace{Y^\top X}_{\operatorname{Tr}(M)}Y^\top = \operatorname{Tr}(M)XYY^\top = \lambda M \quad \text{avec } \lambda = \operatorname{Tr}(M).$$

5. La trace est valeur propre

Dans la suite du texte, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(a) Supposons par l'absurde que $M - \lambda I_n$ est inversible. On a $M^2 = \lambda M$, donc $M(M - \lambda I_n) = 0$, d'où $M = 0$ en multipliant à droite par $(M - \lambda I_n)^{-1}$, or M est non nulle car de rang 1.

(b) On en déduit que l'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est non bijectif, donc non injectif (car endomorphisme de dimension finie). Ainsi il existe un vecteur a non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que $u(a) - \lambda a = 0$, donc $u(a) = \lambda a$.

6. Diagonalisation de M lorsque $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.

On suppose que $\lambda = \mathrm{Tr}(M) \neq 0$.

(a) Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Vect}\,\{a\}$, alors $u(x) = 0$ et $x = ka$ avec $k \in \mathbb{K}$, ainsi $u(x) = ku(a) = k\lambda a$, donc $k\lambda a = 0$ donc $k = 0$ car a et λ sont non nuls. Ainsi $x = 0$ et $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Vect}\,\{a\} = \{0\}$.

Comme M est de rang 1, u est de rang 1 et donc d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, u = n - 1$. Ainsi $\dim \mathbb{K}^n = n = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Vect}\,\{a\}$, ce qui montre que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Vect}\,\{a\}$.

(b) En prenant une base adaptée à cette somme directe, on en déduit que la matrice de u dans cette base est la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \lambda)$. Ainsi M est semblable à la matrice D.

7. Et si $\mathrm{Tr}(M) = 0$?

On suppose que $\mathrm{Tr}(M) = 0$. On a alors $M^2 = 0$ car $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$. Par dico, $u^2 = 0$.

Comme $\mathrm{rg}(M) = 1$, il existe un vecteur e_{n-1} non nul dans $\mathrm{Im}\, u$. On considère alors un vecteur e_n de $\mathbb{K}^n$ tel que $u(e_n) = e_{n-1}$.

Le vecteur e_{n-1} est aussi dans $\mathrm{Ker}\, u$ car $u(e_{n-1}) = u^2(e_n) = 0$. Il est non nul. Il constitue donc une famille libre de $\mathrm{Ker}\, u$, que l'on complète en $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ base de $\mathrm{Ker}\, u$. Le vecteur e_n n'est pas dans $\mathrm{Ker}\, u$, donc la somme $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Vect}\, e_n$ est directe et comme $\dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Vect}\, e_n = n = \dim \mathbb{K}^n$, on a $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Vect}\, e_n = \mathbb{K}^n$. On conclut que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Dans cette base, la matrice de u est de la forme indiquée ci-dessus.

8. Démontrer le théorème 1.

On sait déjà que deux matrices semblables ont même trace. Réciproquement soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang un qui ont même trace.

- si leur trace est non nulle, alors d'après la question 6b, A et B sont semblables à la même matrice $D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \mathrm{Tr}(A))$, donc par transitivité, elles sont semblables.
- si leur trace est nulle, d'après la question 7, A et B sont à nouveau semblables à une même matrice, la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(0, N)$. Elles sont donc semblables.

III Un dernier exercice : Fonctions absolument monotones

Soit I un intervalle non réduit à un point contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$ sur I. On dit que f est absolument monotone sur I.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \quad \text{avec } R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tx) \, \mathrm{d}t.$$

Comme f est de classe C^{n+1} sur I, d'après la formule de Taylor avec reste intégral appliqué au point pivot $a = 0$, on a :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \quad \text{avec } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t.$$

On obtient alors la formule demandée en faisant le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ avec $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{x}$:

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-xu)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux) x \, \mathrm{d}u = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux) \, \mathrm{d}u.$$

2. Soit $r > 0$ un réel tel que $[-r, r] \subset I$. Démontrer que pour tout $x \in [0, r]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} R_n(r)$.

Comme $f^{(n+2)} \geqslant 0$, la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante sur I. Comme $x \leqslant r$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $tx \leqslant tr$ et $(1-t)^n \geqslant 0$, donc $\frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tx) \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tr)$, d'où en intégrant $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tx) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tr) \, \mathrm{d}t$. Ainsi

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} r^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tx) \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} r^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tr) \, \mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} R_n(r). \end{aligned}$$

3. En déduire que pour tout $x \in [0, r[$, la suite de terme général $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge vers $f(x)$.

On écrit alors :

$$\forall x \in [0, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Pour $x \in [0, r[$, on a $0 \leqslant \frac{x}{r} < 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} = 0$.

Pour prouver que $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, il suffit donc de prouver que la suite $(R_n(r))_n$ est bornée.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant R_n(r) = f(r) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k \leqslant f(r)$$

car la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k$ est positive puisque tous ses termes sont positifs.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

On écrit alors :

$$\forall x \in [0, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Nous allons appliquer ce résultat à la fonction tangente.

4. Comme tan est n fois-dérivable, en dérivant n fois l'égalité $\tan' = 1 + \tan^2$ et utilisant la formule de Leibniz.

On a pour $n \geqslant 1$,

$$\tan^{(n+1)} = (1 + \tan^2)^{(n)} \underset{n\geqslant 1}{=} (\tan \times \tan)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}.$$

5. On sait que tan est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, ainsi que $\tan' = 1 + \tan^2$. On en déduit par récurrence forte que $\tan^{(n+1)} \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$.

La fonction tan est donc absolument monotone et donc développable en série entière. Ainsi

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}.$$

6. On a vu que $a_n = \frac{\tan^{(0)}}{n!}$. On a $a_0 = \tan 0 = 0$ et $a_1 = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$.

Pour les suivants, on évalue en 0, la formule de récurrence ci-dessus, et en utilisant que $\tan^{(n)}(0) = a_n \times n!$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& a_{n+1}(n+1)! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k k! a_{n-k}(n-k)! \\
\Longrightarrow \quad & a_{n+1}(n+1)! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} a_k k! a_{n-k}(n-k)! \\
\Longrightarrow \quad & a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_n a_{n-k}
\end{aligned}$$