Corrigé du DM n°3 pour mardi 15/10/2025

Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les copies dont les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés ne seront pas corrigées.

Objectif : traiter au moins deux exercices.

1 Parcours sécurisé

Exercice 1 (Changer d'écriture) (3 points) On pose $Z = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{1-i}$.

1. On a $Z = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{1-i} = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(1+i)}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$.

2. Le module de $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})$ vaut $\frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \sqrt{2}$. On note θ un de ses arguments. On a $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. D'où $\theta = \frac{\pi}{6}$.

   Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}}}$. De même $\boxed{1-i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}}$.

   Ainsi $Z = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}-\frac{-i\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{i5\pi}{12}}$. D'où $\boxed{Z = \mathrm{e}^{\frac{i5\pi}{12}}}$.

3. En prenant les parties réelles de l'écriture algébrique et de l'écriture exponentielle de Z, on a

   $\boxed{\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$.

Exercice 2 (Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{5})$) On pose $S = \sum_{k=0}^{4} \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}$.

Pour $k \in \{,\dots,4\}$, on pose $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$.

1. Démontrer que $S = 0$.

   C'est une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$. Ainsi

$$S = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1-\mathrm{e}^{i2\pi}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = 0.$$

2. Déterminer un réel a tel que $S = 1 + a\cos(\frac{2\pi}{5}) + a\cos(\frac{4\pi}{5})$.

   Un schéma permet de pressentir, que w_1 et w_4 sont conjugués ainsi que w_2 et w_3. Les calculs suivants le prouvent.

On a

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & e^{\frac{2i\pi}{5}} \\ w_2 & = & e^{\frac{4i\pi}{5}} \\ w_3 & = & e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{i(\frac{6\pi}{5}-2\pi)} = e^{i(\frac{6\pi}{5}-\frac{10\pi}{5})} = e^{-i(\frac{4\pi}{5})} \\ w_4 & = & e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{i(\frac{8\pi}{5}-2\pi)} = e^{i(\frac{8\pi}{5}-\frac{10\pi}{5})} = e^{-i(\frac{2\pi}{5})} \end{array}$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl} 1+w_1+w_1^2+w_1^3+w_1^4 & = & 1+e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{-i(\frac{4\pi}{5})}+e^{-i(\frac{2\pi}{5})} \\ & = & 1+\underbrace{e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{-i(\frac{2\pi}{5})}}+\underbrace{e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{-i(\frac{4\pi}{5})}} \\ & = & 1+2\cos\dfrac{2\pi}{5}+2\cos\dfrac{4\pi}{5} \\ & = & 1+2\cos\dfrac{2\pi}{5}+2\cos(2\times\dfrac{2\pi}{5}) \\ & = & 1+2\cos\dfrac{2\pi}{5}+2\left(2\cos^2\dfrac{2\pi}{5}-1\right) \\ & = & 1+2\cos\dfrac{2\pi}{5}+4\cos^2\dfrac{2\pi}{5}-2 \\ & = & -1+2\cos\dfrac{2\pi}{5}+4\cos^2\dfrac{2\pi}{5} \end{array}$$

Ceci montre d'après la question 1. que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une racine du polynôme $4X^2+2X-1$. Or ce polynôme a pour racines $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Mais $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}<0$ tandis que $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ car $\frac{2\pi}{5}\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Ainsi on a

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}.$$

2 Parcours plus difficile

Exercice 3 On pose

$$G=\{z\in\mathbb{C}\ \mid\ \exists n\in\mathbb{N}^*, z^n=1\}.$$

1. Soit z et z' dans G. Il existe donc deux entiers n et p dans de $\mathbb{N}^*$ tels que $z^n=1$ et $z'p=1$. Mais alors $(zz')^{np}=(z^n)^p(z'^p)^n=1^p\times 1^n=1$, donc $zz'\in G$ puisque $np\in\mathbb{N}^*$.
2. Soit z et z' dans G. A-t-on $z+z'\in G$? Remarquons déjà que si $z\in G$, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $z^n=1$, et donc $|z^n|=1$, donc $|z|^n=1$, donc $|z|=1$.

   Les nombres 1 et 1 sont dans G mais $1+1=2\notin G$ puisque $|2|=2\neq 1$.
3. Soit $z\in\mathbb{C}$. Démontrer que :

$$z\in G\iff\exists r\in\mathbb{Q}, z=e^{ir\pi}.$$

Exercice 4 (Étude d'une suite récurrente de nombres complexes) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et de premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Placer sur votre copie un point M quelconque. On note z_0 son affixe. Placer ensuite le point N d'affixe $|z_0|$. Expliquer alors comment on construit le point M' d'abscisse $z_1 = \frac{z_0+|z_0|}{2}$.

2. On suppose que $z_0 \in \mathbb{R}$. Que vaut alors z_n pour tout $n \geqslant 1$?

   Si $z_0 \in \mathbb{R}^+$, alors $z_0 = |z_0|$ d'où $z_1 = z_0$. Par récurrence immédiate, on a donc $z_n = z_0$ pour tout $n \geqslant 1$ (la suite est constante).

   Si $z_0 \in \mathbb{R}^-$, alors $z_0 = -|z_0|$ d'où $z_1 = 0$. Mais alors $z_2 = 0$ et par récurrence immédiate, on a donc $z_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

   Ainsi si $z_0 \in \mathbb{R}$, la suite (z_n) est stationnaire.

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que z_0 n'appartient pas à $\mathbb{R}$. On note alors r_0 son module et $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$ son argument principal.

3. Justifier que $\theta_0 \in]-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Comme z_0 n'est pas réel, son argument θ_0 ne peut valoir 0.

4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Démontrer que $\frac{z+|z|}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre z_n est non nul.

   Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $f(z) = \frac{z+|z|}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En effet, montrons la contraposée : si $f(z) \in \mathbb{R}$, alors $z+|z| \in \mathbb{R}$ et comme $|z| \in \mathbb{R}$, on a $z = z+|z|-|z| \in \mathbb{R}$ (une différence de deux réels est un réel). D'où la contraposée. Ainsi comme $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $z_1 = f(z_0) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, et donc par récurrence immédiate pour tout $\boxed{n \geqslant 1,\ z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$. En particulier z_n est non nul.

On note alors r_n son module et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ son argument principal.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

   On a

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} = \frac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \frac{r_n(1+e^{i\theta_n})}{2} = \frac{r_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}(e^{-i\frac{\theta_n}{2}} + e^{i\frac{\theta_n}{2}}) = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \cos\frac{\theta_n}{2}.$$

   Comme $\theta_n \in]-\pi, \pi[$, $\frac{\theta_n}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos\frac{\theta_n}{2} > 0$ ainsi $r_n \cos\frac{\theta_n}{2}$ est le module de z_{n+1} et $\frac{\theta_n}{2}$ est l'argument principal de z_{n+1}. Par unicité, on a donc

$$r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2} \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

   Une récurrence immédiate montre alors que

$$\theta_{n+1} = (\frac{1}{2})^n \theta_0 \quad \text{et} \quad r_n = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos\frac{\theta_k}{2} = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos\frac{\theta_0}{2^{k+1}} = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$

6. Démontrer que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^1}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\sin\theta}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}.$$

C'est un PACMAN ! On va utiliser $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$.

$$\sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \times \underbrace{\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}}_{\frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{2}} = \ldots \cos\frac{\theta}{2} \times (\frac{1}{2})^{n-1}\sin\frac{\theta}{2} = (\frac{1}{2})^n \sin\theta.$$

Comme $\theta \in]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$, $\sin\frac{\theta}{2^n} \neq 0$, d'où le résultat.

7. En déduire que les suites (r_n) et (θ_n) convergent, préciser leur limite.

La suite géométrique (θ_n) de raison $\frac{1}{2}$ tend vers 0.

D'après le résultat précédent, $r_n = r_0 \dfrac{\sin\theta_0}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)} = r_0 \dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0 \times \frac{\sin\frac{\theta_0}{2^n}}{\frac{\theta_0}{2^n}}}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ car $\sin x \sim x$ en 0, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\theta_0}{2^n}}{\frac{\theta_0}{2^n}} = 1$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$ et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n = r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}$.