CORRRIGÉ du DM n°2 pour lundi 06/10/2025

Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les copies dont les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés ne seront pas corrigées.

Exercice 1 (Point fixe d'une fonction) Si f est une fonction réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle point fixe de f tout réel a de A tel que $f(a) = a$. Les questions peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Déterminer les points fixes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

   On doit résoudre l'équation

   $$f(x) = x \iff x^3-3x^2+3x = x \iff x^3-3x^2+2x = 0 \iff x(x^2-3x+2) = 0 \iff x(x-1)(x-2) =$$

   Les points fixes de f sont donc $0, 1$ et 2.

2. La fonction exp n'admet pas de point fixe comme on peut le deviner graphiquement. Pour le prouver, il suffit de penser à l'inégalité suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geqslant x + 1 > x$.

3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$. Démontrer que f admet un point fixe. Est-il unique ?

   On va s'intéresser à la distance entre x et $f(x)$. On pose pour $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(x) - x$. Il suffit donc de montrer que g s'annule. Or $g(0) = f(0) \in [0, 1]$, donc $g(0) \geqslant 0$. On a aussi $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car $f(1) \in [0, 1]$, donc la fonction continue g change de signe sur $[0, 1]$, donc s'y annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ce point fixe n'est pas unique, puisque si f est par exemple la fonction identité $x \mapsto x$, tout point de $[0, 1]$ est point fixe.

Exercice 2 (Une étude de fonctions) On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

1. Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a $\ln t \geqslant 1 - \dfrac{1}{t}$.

   Comme la fonction ln est concave, sa courbe est en-dessous de ses tangentes et donc en particulier en-dessous de sa tangente en 0 qui a pour équation $y = x - 1$. On a donc $\ln x \leqslant x - 1$.

   Ainsi pour $t > 0$, on a : $\ln \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{t} - 1$. Donc $-\ln t \leqslant \frac{1}{t} - 1$. En multipliant par -1, on obtient le résultat.

2. Déterminer les variations de f (on pourra utiliser l'inégalité précédente).

   La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

   Pour $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x\ln(1+\frac{1}{x})) \times \left(\ln(1+\frac{1}{x}) + x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \times \frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \boxed{\exp(x\ln(1+\frac{1}{x})) \times \left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right)} \end{aligned}$$

   D'après la question 1, en prenant $t = 1+\frac{1}{x}$, on a pour tout $x>0$, $\ln(1+\frac{1}{x}) \geqslant 1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x+1}$. Ainsi $\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1} \geqslant 0$ et donc $f'(x) \geqslant 0$ et par suite f est croissante.

3. Démontrer que pour X au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(1+X) \sim \ln X$.

   Soit X au voisinage de $+\infty$. Morale : « Pour X grand, le terme prépondérant de $1+X$ est X qu'on met en évidence».

   On a $\ln(1+X) = \ln(X(1+\dfrac{1}{X}) = \ln X + \ln(1+\dfrac{1}{X})$. Donc

$$\frac{\ln(1+X)}{\ln X} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{X})}{\ln X}.$$

   Or

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{X})}{\ln X} \sim \frac{1/X}{\ln X} = \frac{1}{X\ln X} \to 0.$$

   Ceci montre que

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{\ln X} = 1.$$

   Ainsi pour X au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(1+X) \sim \ln X$.

4. En déduire la limite de f en 0.

   Pour $x>0$ au voisinage de 0, on a $X = \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. Donc d'après la question précédente,

$$x\ln(1+\frac{1}{x}) \sim x\ln(\frac{1}{x}) = -x\ln x.$$

   Or par croissance comparée, $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc par composée de limites,

$$\lim_{x\to 0} \exp(x\ln(1+\frac{1}{x})) = \exp(0) = 1.$$

   La limite de f en 0 vaut donc 1.

5. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.

   Pour x au voisinage de ∞, $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0, donc on a $x\ln(1+\frac{1}{x}) \sim x \times \frac{1}{x} = 1$. Ainsi par composée de limites, on a

$$\lim_{\infty} f = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$