

Programme de colle semaine 9 du 12/11 au 16/11

Techniques de calcul intégral

Pour ce chapitre, l'accent est mis sur **le calcul**, notamment avec les techniques d'intégration par parties, de changement de variables et de majoration/minoration d'intégrales.

Il sera complété en cours d'année. Par exemple, les sommes de Riemann **n'ont pas été traitées** et les études de fonctions du type $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ **ne sont pas** un objectif de cette colle (on peut éventuellement en poser, mais il faudra guider l'étudiant).

Questions de cours

1. Calcul de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$ en calculant de deux façons différentes $\int_0^1 (1+x)^n dx$.
2. Primitive de \ln par une IPP
3. $J = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$ en posant $u = \sqrt{t}$.
4. Calcul de $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ avec le changement de variable $x = \cos t$
5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{8}$.
6. si f est continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$
7. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \sin(x^2)}{3+x^4} dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$
8. $H_n \sim \ln n$ (série harmonique) par comparaison série intégrale.

I Intégrale d'une fonction continue

On admet que l'on peut définir l'intégrale sur un segment $[a, b]$ de toute fonction continue f avec les propriétés de linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

II Comment calculer une intégrale ?

II.1 Notion de primitive

- Définition d'une primitive
- Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions usuelles (fonctions puissances, fonctions trigonométriques, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \dots$)

II.2 Théorème fondamental de l'analyse

- énoncé : si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $a \in I$, la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a , en particulier F_a est dérivable et $F'_a = f$.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.
- Pour calculer une intégrale, il suffit de chercher des primitives!

III Deux outils fondamentaux

III.1 L'intégration par parties (IPP)

- la technique d'IPP
- calcul de primitives pour \ln , \arctan ou $x \mapsto x^2 e^x$ (double IPP).
- obtention de relation de récurrence pour des suites définies par des intégrales comme celles de Wallis par exemple.

III.2 Le changement de variables

IV Applications ou compléments

IV.1 Quelques calculs classiques

1. Primitives de fonctions trigonométriques (linéarisations...)
2. Calcul d'intégrales de fractions rationnelles du type $\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} dx$, en discutant selon le nombre de racines réelles du dénominateur et en faisant la division euclidienne de P par $ax^2 + bx + c$ si $\deg P \geq 2$.

IV.2 Majoration ou minoration d'intégrales

- Limites par encadrement de suites du type $I_n = \int_a^b f_n(t) dt$
- Comparaison série intégrale avec un équivalent de la série harmonique.

IV.3 Cas des fonctions à valeurs complexes